Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia

(Quadratic equations and algorithmic procedures. Diophantus and Mesopotamian mathematics)

Piedad YUSTE

Recibido: 15.03.2008
Versión final: 25.05.2008

BIBLID [0495-4548 (2008) 23: 62; pp. 219-244]

RESUMEN: En este ensayo presento un análisis comparativo entre los diversos procedimientos creados, respectivamente, por los matemáticos babilonios y Diofanto de Alejandría para resolver ecuaciones de segundo grado. Observaremos cómo los primeros recurrieron a la composición de diagramas mientras Diofanto aplicó un algoritmo abstracto que no consiguió generalizar.

Descriptores: matemáticas en Mesopotamia, álgebra, Diofanto de Alejandría, ecuaciones cuadráticas, algoritmos.

ABSTRACT: *In this paper I present a comparative analysis among the diverse procedures invented respectively by the Babylonian mathematicians and Diophantus of Alexandria to solve quadratic equations. We will observe how the first ones appealed to the composition of diagrams while Diophantus applied an abstract algorithm that he was not able to generalize.*

Keywords: *Mesopotamian mathematics, Diophantus of Alexandria, ancient algebra, algorithms, quadratic equations.*

A Eva Leciñena
In Memoriam

1. Introducción

Diofanto de Alejandría introdujo en su *Aritmética* (ca. 250 d. C.), y sin previa justificación[1], un algoritmo explícito para resolver las ecuaciones cuadráticas. Se trata de un primer enunciado de la conocida fórmula que determina las ecuaciones de segundo grado. Haciendo una lectura detallada de los libros que conservamos de esta obra (griegos y árabes), observamos que este algoritmo aparece en pocas ocasiones; concretamente, en algunos ejercicios de los libros IV, V y VI de la edición griega. El autor asigna una solución única para las igualdades (y desigualdades) de las clases A y B: $ax^2 \pm bx = c$; y en las de tipo C: $ax^2 + c = bx$, aunque existen dos modalidades —según el cuadrado de (ax) sea mayor o menor que el producto (ac)— Diofanto sólo toma en cuenta una de ellas.

[1] No sabemos si en alguno de los libros y obras desaparecidos explicó el origen y fundamento de este algoritmo. Hasta el momento, sólo conservamos el testimonio del propio Diofanto en la parte introductoria de la *Aritmética*. Consultar la edición bilingüe de los textos griegos en Tannery (1910). También, la traducción francesa de Ver Eecke (1959) y la reciente en castellano de Benito Muñoz, Fernández Moral y Sánchez Benito (2007). También, Thomas Heath (1910). Los libros árabes los encontramos publicados en Sesiano (1982) y Rashed (1984).

En Oriente Próximo, y desde épocas muy remotas, se inició una larga tradición de calculadores y prácticos cuyos métodos se apoyaban en las técnicas de agrimensura; estos conocimientos fueron recogidos e impartidos en las escuelas sumerias (ca. 2100 a C.), donde evolucionaron hacia materias más sofisticadas y teóricas; o discurrieron paralelos y fuera de las mismas, componiendo colecciones de acertijos y enigmas[2]. Posteriormente, se transmitieron a otras culturas y pueblos limítrofes. Poseemos numerosos documentos escritos en cuneiforme, procedentes del período babilónico arcaico (2000-1600 a. C.), que nos informan de las características de la enseñanza impartida en las escuelas de escribas, las áreas de conocimiento abarcadas y las actividades realizadas en las mismas. En relación a la instrucción en el ámbito de las matemáticas, sabemos que ésta consistía principalmente en la resolución de ejercicios prácticos, una vez se hubieran memorizado largas listas de números cuadrados, cúbicos y sus respectivas raíces; tablas de multiplicar y de números inversos[3]; series de constantes relacionadas con la elaboración de ladrillos y la construcción de zanjas, muros, pozos y rampas de acceso a fortificaciones; coeficientes para calcular los sueldos devengados a los artesanos; raciones de alimento para los esclavos; constantes que aluden a la composición de figuras y polígonos regulares[4]; técnicas para realizar repartos proporcionales de herencias y división de terrenos; fórmulas para efectuar cómputos de intereses por capitales prestados, etc.[5]

En muchas ocasiones, los ejercicios propuestos concluían con una expresión que coincide exactamente con el algoritmo que resuelve las ecuaciones de segundo grado. Pero la estrategia empleada para obtener estas soluciones no era simplemente numérica o algebraica, sino geométrica; lo sabemos por el lenguaje utilizado en las tablillas, cuando el escriba nos indica los cálculos que debemos realizar[6]. Todos estos conocimientos formaban parte del acervo cultural de los pueblos de Mesopotamia hasta el período Seleúcida (s. III a. C.), compartido por los sabios egipcios de esta última época[7]. A partir de entonces, desconocemos cómo este saber llegó a Grecia, pues conser-

---

[2] Conservamos algunos de estos problemas en fragmentos de papiros griegos o en documentos romanos, en la *Métrica* de Herón y en la Colección *Geométrica*, atribuida a éste; también en la *Antología Palatina* (Sesiano 1999, pp. 18 y ss. Vitrac 2005). Jens Høyrup (1997 y 2001) sostiene que, además de la actividad desarrollada en las escuelas, existió una corriente de prácticos iniciada hacia el 2000 a C. cuyos conocimientos no escolarizados dejaron su impronta en Herón y, posteriormente, en los matemáticos árabes y medievales.

[3] Neugebauer y Sachs, *MCT*. En el período paleobabilónico, no se efectuaban divisiones entre números, sino el producto entre un número y su inverso.

[4] Los polígonos y figuras regulares se construían mediante el uso de un coeficiente o factor que relacionaba dos de las magnitudes esenciales de esas figuras; por ejemplo, la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es 3. Ver Robson (1999).

[5] Nemet-Nejat clasifica 23 tipos de problemas matemáticos (1993, p. 93).

[6] Jens Høyrup ha descubierto este aspecto tras un exhaustivo análisis de los términos usados en los ejercicios; observa el uso de vocablos distintos para referirse a la misma operación aritmética, de tal modo, que algunos de ellos apuntan a la construcción de cuadrados y rectángulos y al cálculo de sus respectivos lados. (Ver Høyrup, a partir de 1987; un compendio de toda su obra en 2002).

[7] Aunque el origen de estos conocimientos no es común en ambas civilizaciones, en el período seleúcida sí hubo una clara influencia de Mesopotamia en Egipto (Friberg 2005, p. 189).

vamos muy pocos documentos que nos informen acerca de posibles influencias y transmisiones[8]. Probablemente, estas técnicas de computación —tan útiles a comerciantes y mercaderes— se impartieron de forma oral en escuelas y talleres y nos sorprende que, así como poseemos numerosos textos griegos de carácter geométrico, son escasos los dedicados al planteamiento y resolución de ejercicios aritméticos; al menos del modo en que lo hicieron los matemáticos babilonios: el arte al que Platón había denominado logística para distinguirlo de la aritmética elaborada en la Escuela de Pitágoras y después compendiada por Euclides.

Ejercicios parecidos a los registrados en las tablillas mesopotámicas los veremos de nuevo en la *Métrica* de Herón[9] y, principalmente, en la *Aritmética* de Diofanto (ca. 250 d.C.), aunque expuestos aquí de un modo más general, a medio camino entre aquéllos y los descritos por los algebristas árabes medievales. Las viejas técnicas de computación creadas en la Antigua Babilonia, basadas en procedimientos geométricos, y empleadas para resolver casos concretos, fueron sustituidas poco a poco por otras tácticas no visuales y exclusivamente numéricas, gracias a la introducción y uso de ciertas reglas y rutinas. El paso de una *logística numerosa* a otra de naturaleza *teórica* lo dará Diofanto, pero no de una manera radical y absoluta, sino poco a poco, mediante el enunciado de un algoritmo que solamente utiliza de manera restringida, a partir de una sola forma de completar el cuadrado, y sin desprenderse del todo de los tradicionales métodos visuales.

Este trabajo gira alrededor de una cuestión que, en mi opinión, necesita ser aclarada: Si Diofanto había descubierto un algoritmo abstracto[10] con el que determinar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, ¿por qué no lo ensayó primero en unos ejercicios tan sencillos y esenciales como los que se encuentran al final del primer libro de su *Aritmética*? ¿Por qué introduce en tres de ellos un principio de carácter geométrico que condiciona su posterior resolución analógica? ¿Qué motivos le llevan a emplear aquí el procedimiento tradicional del promedio y la desviación?[11] ¿Qué características posee este algoritmo que lo diferencia de las fórmulas utilizadas por los calculadores y matemáticos precedentes?

Para responder a estas cuestiones revisaremos, en primer lugar, algunos de los ejercicios planteados por los matemáticos de Mesopotamia, mostrando cómo su estrategia consistía en la visualización de las pruebas. Después, estudiaremos los problemas en los que Diofanto parece mantener cierto arraigo con los procedimientos tradicionales, así como analizaremos brevemente aquellos otros en los que aparece este algoritmo.

---

[8] El Papiro de El Cairo (s. II d. C.) es clave en este sentido, según afirma Jöran Friberg (Ibid., p. 191). Otros papiros del mismo período (Michigan y Carlsberg) contienen sistemas lineales con varias incógnitas, muy parecidos a algunos textos procedentes de las épocas arcaica, media y última, de Babilonia.

[9] Recogidos por Heiberg en la colección *Geometrica* 21, 9-10; 24, 1, 3 y 10 (ed. Heiberg, Heron IV). Høyrup (1997, 2002)

[10] La introducción de este algoritmo, en unos ejercicios concretos, posee las características de una expresión general.

[11] Jens Høyrup denomina así a los algoritmos de la semisuma y semidiferencia de dos magnitudes, los cuales fueron muy provechosos en las matemáticas mesopotámicas.

2. Procedimientos analógicos en la Antigua Babilonia

Hablar de ecuaciones cuadráticas o bicuadráticas, incluso de octavo grado[12], dentro del corpus de las matemáticas babilónicas significa únicamente reconocer el *algoritmo* que las resuelve, pues no vamos a encontrar en este contexto expresiones del tipo $ax^2 \pm bx = c$, ni siquiera bajo el aspecto de cantidades concretas. En las tablillas, no aparecen deducciones, razonamientos ni demostraciones, sino el enunciado de un ejercicio y una serie de cálculos que, tomados conjuntamente, nos descubren la expresión final o fórmula, a la que nosotros vamos a denominar *algoritmo geométrico*.

Los métodos utilizados para obtener las magnitudes requeridas eran pues de índole geométrica: consistían en la composición de figuras planas y en su inmediata descomposición en superficies equivalentes. Así, aunque en los textos, aparentemente, se describa un *algoritmo aritmético*, en realidad los números y las operaciones indicadas aluden al la construcción de rectángulos y cuadrados; y el cálculo de las raíces cuadradas no es sino el modo de averiguar la medida de sus lados[13]. El *algoritmo geométrico* de los babilonios es analógico: traza líneas y superficies; determina la equivalencia entre un rectángulo y la diferencia de dos cuadrados y puede ser útil también en la resolución de ejercicios de otros linajes, como repartos de herencias, progresiones aritméticas y geométricas, cálculo de intereses, etc. Los instructores y maestros argumentaban, seguramente, en diagramas dibujados en arenarios y tableros de polvo. Los escolares se limitaban a realizar los cálculos en sus tablillas[14].

En el período babilónico arcaico o paleobabilonio (2000-1600 a.C.)[15], el sistema de numeración era exclusivamente sexagesimal y posicional[16]; no concibieron un grafema de cantidad nula o cero (al menos, hasta el período seleúcida o helenístico: 330-141 a.

[12] Ecuación bicuadrática en BM 13901 (12) (MKT III, p. 3); de octavo grado en *TMS* XIX (2) (Yuste2007); ecuación cúbica en YBC 6295 (*MCT*, p. 42). Ver bibliografía en Nemet-Nejat (1993). También Høyrup (2002).

[13] Brevemente: la operación suma disponía de dos términos (las palabras en cursiva proceden de la lengua acadia): *wāsabum* (*añadir*) y *kāmarum* (*acumular*). La sustracción, de otros dos: *nāsaḫum* (quitar, cortar) y *watārum* (exceder). Respecto al producto, distinguían entre multiplicar un número por un número: a. rá (vocablo de origen sumerio); aumentar una magnitud en una determinada cantidad o calcular volúmenes y áreas: *nâsum*; doblar o repetir una cantidad: *esēpum*; componer un rectángulo: *šutakūlum*, o un cuadrado: *mitḫartum*. También inventaron un vocablo para designar un rectángulo en el que uno de sus lados era la unidad: *wāsītum*. Leer a Jens Høyrup (2002, pp. 20 y ss.).

[14] Sabemos por Eleanor Robson (1999) que los escolares utilizaban tablillas lenticulares para efectuar sus cálculos. Los escribían en una de sus caras, mientras en la otra, copiaban documentos literarios o administrativos.

[15] La cronología en Mesopotamia se ha realizado en función de los datos astronómicos recogidos en las tablillas, como eclipses lunares y solares, periodos orbitales, etc.; existen cuatro cronologías básicas: baja, media, alta y ultra-alta, cuyo establecimiento se debe a los ciclos registrados en las Tablas de Venus, procedentes del reinado del rey Amiṣaduqa, nieto de Hammurapi. Los años se ajustan sumando o restando 64 ó 56 años. Ver Oppenheim (2000).

[16] En períodos anteriores convivían hasta 13 sistemas de numeración diferente, casi todos procedentes de Uruk IV (3100 a C.). Durante la III dinastía de Ur (instaurada por Gudea de Lagaš en 2112) coexistieron tres sistemas numéricos distintos: decimal, sexagesimal y fraccionario, con 60 signos. Ver Nissen, Damerow y Englund (1990).

C.), pues los diversos órdenes de magnitud se distinguían dejando huecos intermedios. Manejaban dos signos para representar todos los números: uno para la unidad, 60 y sus múltiplos y submúltiplos; otro para la decena y sus respectivos múltiplos y submúltiplos. Siguiendo la notación de Otto Neugebauer:

$$x, y, z; m, n_{(60} \approx x \cdot 60^2 + y \cdot 60 + z + m \cdot 60^{-1} + n \cdot 60^{-2}{}_{(10}$$

La numeración sexagesimal permite eludir las fracciones infinitas con más frecuencia que usando base decimal; de esta manera, casi todos los cálculos se efectuaban como si se operase con cantidades enteras; no obstante, los escribas babilonios reconocieron números irregulares: 7, 11, 13, etc., que evitaban en la medida de lo posible, a no ser que concibieran ejercicios específicos para ellos[17]. Asimismo, utilizaron los métodos de falsa posición y sustitución[18]. Los escribas solían omitir las unidades de medida, pero suponemos que éstas eran las habituales: "NINDA" para las longitudes y "sar" para las superficies[19].

Los matemáticos mesopotámicos imaginaron ejercicios muy complejos, cuya finalidad teórica y recreativa se situaba fuera del entorno administrativo y comercial. El propósito de éstos y de otros problemas, como los que incluimos aquí, consistía en lograr que los escolares se familiarizaran con las técnicas geométricas de cálculo[20].

Para encauzar nuestra investigación, partiremos de la siguiente clasificación, inspirada en François Thureau-Dangin[21]:

2.1. Igualdades no explícitas con una sola incógnita:

A) $ax \cdot x + bx = c$

$$\text{Solución: } ax = \sqrt{\square\left(\text{sobre } \frac{b}{2}\right) + \square\ (a \cdot c)} - \left(\frac{b}{2}\right)$$

B) $ax \cdot x - bx = c$

$$\text{Solución: } ax = \sqrt{\square\left(\text{sobre } \frac{b}{2}\right) + \square\ (a \cdot c)} + \left(\frac{b}{2}\right)$$

---

17 Høyrup (1993); Melville (2002).

18 El método de falsa posición consistía en dar un valor cualquiera o la unidad, a la magnitud desconocida; después se procedía mediante análisis. Ver, por ejemplo, Thureau-Dangin (1938), Li Ma (1993), Melville (2002). A veces, en los diagramas, se sustituye o representa una superficie por una línea como en BM 13901 (12) (Høyrup 2002, pp. 71-77); en *TMS* XIX (2), es la cuarta potencia la que se representa en una línea.

19 El NINDA medía aproximadamente 3 m; el sar equivale a (NINDA × NINDA). Un bùr mide 30,0 sar; estas unidades métricas son de origen sumerio. Ver Neugebauer y Sachs (*MCT*).

20 Son muy interesantes los ejercicios propuestos en TMS IX y AO 8862 (Høyrup 2002, pp. 89-95; y 162-174).

21 Ver Thureau-Dangin (*TMB*, pp. XX y ss).

C) $ax \cdot x + c = bx$

Con dos soluciones: $ax = \left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\square\left(\text{sobre } \frac{b}{2}\right) - \boxed{}\ (a \cdot c)}$, pues existen dos estructuras geométricas o diagramas que las definen. Aquí, la composición básica consiste en la diferencia entre cuadrado y rectángulo.

2.2. Igualdades no explícitas con dos incógnitas:

Cuando las magnitudes requeridas son dos, cada una de ellas se determina aplicando respectivamente los *algoritmos geométricos* A y B, o las dos modalidades de C. Lo veremos en los ejemplos examinados.

La tablilla BM 13901, perteneciente al período babilónico arcaico, reúne una serie de problemas que actualmente resolveríamos estableciendo ecuaciones de las clases A y B:

Los ejercicios 1, 3, 4, 5, 6, 7, serían del tipo A, mientras 2 y 16 son de la clase B. Podemos adscribir a este mismo grupo problemas en los que se pide calcular dos magnitudes utilizando como datos su diferencia y su producto; incluso otros más complejos. En todos ellos, encontramos una descripción del *algoritmo geométrico.*

Las igualdades del tipo C se hallarían implícitas, por ejemplo, en problemas en los que hay que averiguar dos números o magnitudes una vez conocidas la suma y el producto de ambas:

a) $ax = \frac{b}{2} - \sqrt{\square\left(\text{sobre } \frac{b}{2}\right) - \boxed{}\ (a \cdot c)} \Leftrightarrow x < c$

b) $ax = \frac{b}{2} + \sqrt{\square\left(\text{sobre } \frac{b}{2}\right) - \boxed{}\ (a \cdot c)} \Leftrightarrow x > c$

Cada una de estas soluciones procede de un diagrama diferente.

3. Problemas analógicos con algoritmos de las clases A y B

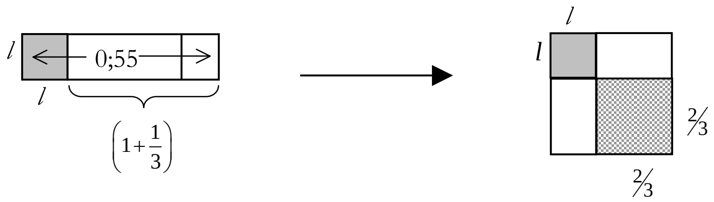
Son problemas analógicos los que trasladan las magnitudes conocidas y las incógnitas a una figura plana, directamente, tal como son enunciadas. La deducción del escriba se lleva a cabo sobre el diagrama, y de su certera manipulación se extraen el algoritmo y la prueba; pero el procedimiento mental desarrollado es analítico, en el sentido que le confiere Pappo de Alejandría[22].

[22] Según escribe Pappo, el método analítico consiste en proponer como hipótesis la verdad que se quiere demostrar y, partiendo de ahí, desarrollar un argumento deductivo hasta alcanzar un principio unánimemente aceptado (Pappus of Alexandria, *Mathematical Collection* VII, p. 82). Jens Høyrup (1997, p. 68; note 5) escribe: "This [Babylonian mathematics] is *quasi-algebraic*. *Algebraic* because the method is analytical: the unknown is treated as if it were a normal identifiable quantity, and then extricated from the complex relationship in which it is originally involved; *quasi* because the method is not arithmetical as in Modern algebra but a naive cut-and-paste geometry, where the correctness of the steps is immediately seen but non argued."

3.1. Con una sola incógnita

- Ejercicio BM 13901[23] (5): "He sumado la superficie [de mi cuadrado], el lado de mi cuadrado y el tercio del lado de mi cuadrado: 0; 55"

– Planteamiento y deducción del escriba:



Figuras 1 y 2

– Operaciones aritméticas realizadas:

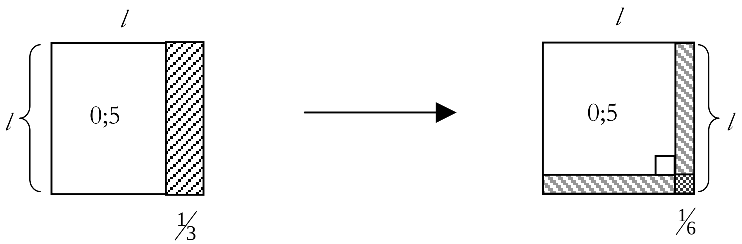
$$1 + \frac{1}{3} = 1 + 0;20 = 1,20 \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 1;20 = 0;30 \cdot 1;20 = 0;40$$

– Expresión simbólica y *algoritmo geométrico*:

$$\square\ (\text{sobre } l) + \boxed{}\,(1;20\ l) = 0;55 \rightarrow l = \sqrt{\square\ (\text{sobre } 0;40) + \boxed{}\ (0;55)} - 0;40 = 0;30$$

- Ejercicio BM 13901 (16): "He sustraído de la superficie el tercio del lado de mi cuadrado: 0;5"

– Planteamiento y deducción del escriba:



Figuras 3 y 4

– Operaciones aritméticas realizadas:

$$\frac{1}{3} = 0;20 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0;20 = 0;30 \cdot 0;20 = 0;10$$

23 Tabilla depositada en el Museo Británico. Neugebauer (*MKT* III, pp. 1 y ss.); Thureau-Dangin (*TMB*, pp. 1 y ss). Høyrup (2002).

– Expresión simbólica y *algoritmo geométrico*:

$$\square\ (\text{sobre } l) - \boxed{}\left(\frac{1}{3}\cdot l\right) = 0;5 \longrightarrow l = \sqrt{\square\ (\text{sobre } 0;10) + \boxed{}\ (0;5)} + 0;10 = 0;30$$

3. 2. Con dos incógnitas

Algoritmo geométrico básico*: El cuadrado de la semidiferencia de las dos magnitudes, más el rectángulo formado por su producto, es igual al cuadrado de la semisuma.*

- Ejercicio VAT 6598[24] (4): "Un muro de ladrillos cocidos. La altura del muro es 1 NINDA. Los ladrillos cocidos son 9 s a r. La longitud excede al espesor en 1;50 [NINDA]. ¿Cuánto miden la longitud y el espesor de mi muro?"

– Planteamiento y deducción del escriba:

Figuras 5 y 6

– Operaciones aritméticas realizadas[25]:

$$V = 9 \cdot \frac{1}{2;15} = 9 \cdot 0;26,40 = 4\ \text{sar}_V\ [\text{NINDA} \cdot \text{NINDA} \cdot \text{kùš}] \quad \rightarrow S = \frac{4}{12} = 0;20\ \text{sar}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1;50 = 0;30 \cdot 1;50 = 0;55$$

– Expresión simbólica y *algoritmo geométrico*:

$$L = \sqrt{\square(\text{sobre } 0;55) + \boxed{}\ (0;20)} + 0;55 = 2\ \text{NINDA}$$

$$l = \sqrt{\square(\text{sobre } 0;55) + \boxed{}\ (0;20)} - 0;55 = 0;10\ \text{NINDA}$$

---

24 Tabilla depositada en el Staatliche Museen (Berlín). Neugebauer (*MKT* I, p. 277-280); Thureau-Dangin (*TMB*, pp. 127-130). Ver estudio y bibliografía en Robson (1999, pp. 231-244).

25 En el período babilónico arcaico se construían siete clases distintas de ladrillos, cada una de ellas identificada por un número o coeficiente. Los ladrillos se agrupaban en bloques conteniendo 12,0 ladrillos, expresados en unidades s a r $_b$. El coeficiente aquí es 2;15: el número inverso que multiplicado por el volumen nos proporciona el número de ladrillos utilizados. Ver Robson (1999, pp. 58-60). Neugebauer y Sachs (*MCT*, p. 5).

Como vemos, ambas incógnitas se extraen del mismo diagrama.

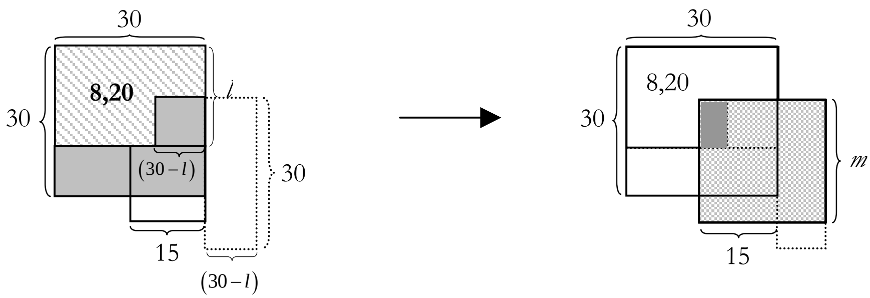
4. Problemas analógicos con algoritmos de la clase C

Aunque existen dos diagramas específicos que traducen cada una de las modalidades de la ecuación C, los matemáticos babilonios sólo utilizaron uno de ellos, a partir del cual deducen los valores de una o dos incógnitas, si las hubiera. La explicación reside, precisamente, en la interpretación geométrica de los enunciados.

4.1. Con una incógnita

- Ejercicio YBC 6504 (3)[26]: “He cuadrado la diferencia entre la longitud y la anchura. He sustraído [esta cantidad] de la superficie: 8,20. La longitud es 30. ¿Cuánto es el ancho?

– Planteamiento y deducción del escriba:



Figuras 7 y 8

– Expresión simbólica y *algoritmo geométrico*:

$$\boxed{}\,(30 \cdot l) - \square\,[\text{sobre } (30 - l)] = 8{,}20$$

$$l = 30 - \underbrace{\sqrt{\square\,(\text{sobre } 30) - \left[\boxed{}\,(30 \cdot l) - \square\left[\text{sobre}\,(30 - l)\right]\right] + \square(\text{sobre } 15)}}_{m} - 15$$

$$l = 30 - \sqrt{\square\,(\text{sobre } 30) - 8{,}20 + \square(\text{sobre } 15)} - 15$$

$$l = 30 - (25 - 15) = 20$$

[26] Tablilla depositada en el Museo de la Universidad de Yale. Neugebauer (*MKT* III, pp. 22 y ss.); Thureau-Dangin (*TMB*, pp. 134 y ss.); Høyrup (2002, pp. 177 y ss.). Son interesantes también los ejercicios 1 y 2.

4.2. Con dos incógnitas

Algoritmo geométrico básico*: El cuadrado de la semisuma de las dos magnitudes, menos el rectángulo formado por ambas, es igual al cuadrado de la semidiferencia* [27].

- Ejercicio YBC 6504 (2)[28]: "He cuadrado la diferencia entre la longitud y la anchura. He sustraído [esta cantidad] de la superficie: 8,20. He sumado la longitud y la anchura: 50"

$$L = 25 + \sqrt{\square\,(\text{sobre }\ 25) - \frac{1}{5}\left[\square\,(\text{sobre }\ 50) + 8{,}20\right]} = 30$$

$$l = 25 - \sqrt{\square\,(\text{sobre }\ 25) - \frac{1}{5}\left[\square\,(\text{sobre }\ 50) + 8{,}20\right]} = 20$$

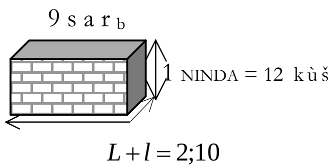
- Ejercicio BM 34568[29] (9): "He sumado la longitud y la anchura: 14. Además, la superficie es 48"

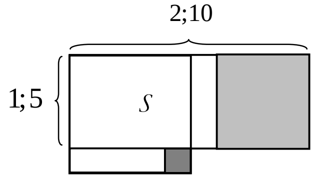
$$l = \frac{14 - \sqrt{\square\,(\text{sobre }\ 14) - 4\boxed{\quad}\,(48)}}{2} = 6$$

$$L = 6 + \sqrt{\square\,(\text{sobre }\ 14) - 4\boxed{\quad}\,(48)} = 8$$

- Ejercicio VAT 6598 (3): "Un muro de ladrillos cocidos. La altura del muro es 1 NINDA. Los ladrillos cocidos son 9 *sar*. He sumado la longitud y el espesor de mi muro: 2;10 [NINDA]. ¿Cuánto miden la longitud y el espesor de mi muro?"

– Planteamiento y deducción del escriba:





Figuras 9 y 10

---

[27] Son de esta clase los problemas YBC 6504 (2), BM 34568 (9, 10 y 15). Todos ellos hacen referencia a un rectángulo del que se piden su longitud y anchura conociendo determinadas magnitudes.

[28] Ver resolución y diagrama en Høyrup (2002, p. 176).

[29] La tablilla BM 34568 proviene del período seleúcida: Neugebauer (*MKT* III, p. 14 y ss.); Thureau-Dangin (*TMB*, pp. 57 y ss.). Ver la interpretación y el diagrama de Høyrup (2002, pp. 391 y ss.). Diofanto propone un ejercicio similar con un método idéntico en *Aritmética* I.30.

$$V = 9 \cdot \frac{1}{2;15} = 4 \text{ sar}_V \text{ [NINDA} \cdot \text{NINDA} \cdot \text{kùš]}$$

$$S = \frac{4}{12} = 0;20 \text{ sar}$$

– Expresión simbólica y *algoritmo geométrico*:

$$L = 1;5 + \sqrt{\square(\text{sobre } 1;5) - \square(0;20)} = 2 \text{ NINDA}$$

$$l = 1;5 - \sqrt{\square(\text{sobre } 1;5) - \square(0;20)} = 0;10 \text{ NINDA}$$

5. Problemas analógicos complejos

Denominamos así a los ejercicios en los que ni las líneas ni las superficies dibujadas se corresponden exactamente con las magnitudes propuestas en los enunciados. Como es habitual, el escriba necesita construir un cuadrado para después descomponerlo en sus respectivas regiones equivalentes. Para ello, o bien multiplica todas las magnitudes por el número de *superficies*, o elimina esta cantidad multiplicándola por su número inverso.

La primera opción era la más frecuente en el período babilónico arcaico. En 1938, François Thureau-Dangin descubrió un ejercicio que se alejaba de la norma: BM 85194 (25); aquí, el coeficiente del cuadrado de la incógnita se eliminaba multiplicando por su número inverso[30]. Más adelante, Taha Baqir mostró un nuevo caso de aplicación de este mismo procedimiento en IM 52301 (2)[31]. En opinión de ambos investigadores, los matemáticos de la Antigua Babilonia preferían elevar al cuadrado (o construir un cuadrado sobre) la cantidad que acompaña al cuadrado de la magnitud desconocida, antes que anularla. Ambos contemplaron aquella matemática desde una perspectiva algebraica.

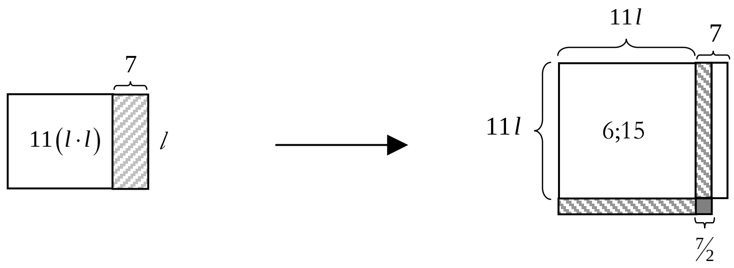
5.1. Composición del cuadrado multiplicando por el coeficiente

➢ Ejercicio BM 13901 (7): "He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces la superficie: 6;15"

[30] Thureau-Dangin (*TMB* pp. XXII y XXVI). Leer la resolución geométrica de BM 85194 (25 y 26) en Høyrup (2002).

[31] Baqir (1950 b). Ver también Yuste (2006).

– Planteamiento y deducción del escriba:



Figuras 11 y 12

– Operaciones aritméticas realizadas: $\frac{7}{2} = 0;30 \cdot 7 = 3;30$

– Expresión simbólica y *algoritmo geométrico*:

$7l + 11(l \cdot l) = 6;15$

$$\longrightarrow \quad 11l = \sqrt{\square\,(\text{sobre } 3;30) + 11 \cdot 6;15} - 3;30$$

$7 \cdot 11l + \square\,(\text{sobre } 11l) = 11 \cdot 6,15$

$$11l = 5;30 \;\rightarrow\; l = 0;30$$

5.2. Composición del cuadrado multiplicando por el inverso del coeficiente

En BM 85194[32] (25 y 26) la *deducción* se apoya en la proporcionalidad existente entre los lados de los triángulos con *ángulos correctos*[33], como sucede también en el ya clásico IM 55357[34], lo cual no indica que esta clase de correspondencia se hubiera generalizado a toda clase de triángulos. También se utiliza este procedimiento en IM 52301.

5.3. Problemas analógicos aplicando la regla de Pitágoras

Conservamos varios documentos en los que se aplica el llamado Teorema de Pitágoras o regla de la diagonal[35]. También tenemos algunos textos que sólo utilizan triples pita-

[32] Tablilla procedente del período paleobabilónico; está depositada en el Museo Británico. Neugebauer (*MKT* I, p. 149). Thureau-Dangin (*TMB*, pp. 34-35). Jens Høyrup realiza una elegante explicación del problema 25 (2002, pp. 217-222). En el siguiente ejercicio (26), el escriba multiplica la superficie del doble de la sección triangular de la rampa por la proporción que guardan los segmentos de la longitud y la altura construidos hasta el momento; así obtiene el cuadrado de la altura total (Høyrup, ibid.).

[33] "The Old Babylonian *right* angle was understood in its opposition to a wrong angle." (Høyrup 2002, p. 228).

[34] Ver IM 55357, procedente de Tell Harmall en (Baqir 1950a y Høyrup 2002, pp. 231-234).

[35] Hay otros problemas pertenecientes al período babilónico arcaico en los que también se aplica la regla de Pitágoras a un diagrama complejo: Db_2 – 146, *Tell Dhiba'i-Eshnunna. TMS* XIX, etc. Ver Damerow (2001), Hoyrup (2002), Robson (1999), Melville (2004). Aquí, el escriba iguala los cuadrados de *L* más *l* con el cuadrado de *d*.

góricos, como el ya mencionado IM 55357 y también YBC 8633[36], aparte de la famosa Tablilla Plimpton 322[37]. El ejercicio nº 17 de BM 34568, procedente del período seleúcida, posee un enunciado que nos recuerda al que Diofanto planteó en *Aritmética* VI.22:

- BM 34568 (17)[38]: He sumado la longitud, el ancho y la diagonal [de mi rectángulo]: 12. Además, la superficie es 12. ¿Cuánto miden los lados y la diagonal?

6. La obra de Diofanto de Alejandría

La *Aritmética*[39] de Diofanto tiene ciertas peculiaridades: no es un tratado de teoría de números, como son los libros VII a IX de los *Elementos* de Euclides, en los que ninguna cantidad concreta aparece; tampoco se trata de una *logística numerosa*, según había denominado Platón al arte de realizar cálculos con números enteros o racionales; es más bien una obra de logística teórica, pues los números que intervienen aquí son considerados como especies, aunque (debido a la falta de simbolismo) Diofanto utiliza números concretos para llevar a cabo sus razonamientos. La *Aritmética* es un libro de problemas, cuyos enunciados son generales y las soluciones, particulares. Esta obra contiene aproximadamente 260 ejercicios resueltos de muy diversas maneras. Inicialmente constaba de 13 libros, según refiere su autor en la introducción al libro I. Conservamos seis de ellos en la edición griega, procedentes de un comentario realizado por Hipatia[40], y cuatro más (de un total de siete) en la versión árabe[41]. También disponemos de un fragmento de otra obra: *Sobre los Números Poligonales*. No obstante, sabemos que Diofanto, posiblemente, compuso unas *Moriásticas* y una colección de *Porismas*; y quizá unos *Elementos de Aritmética*[42]. Pero todas estas obras se han perdido.

En la *Aritmética*, Diofanto define por primera vez las ecuaciones de segundo grado: *igualdades en las que dos especies son iguales a una especie* [$ax^2 \pm bx = c$]; distinguiéndolas de otras mucho más simples, en las que *una especie es igual a una especie* [$ax^n = bx^m$]. Su estra-

---

[36] Neugebauer & Sachs (*MCT*, pp. 53-54). Yuste (2008).

[37] En Neugebauer y Sachs (*MCT*, pp. 38-41).

[38] Thureau-Dangin (*TMB*, p. 62). Consultar Høyrup (2002, p. 397). También en Herón, *Geometrica* (ed. Heiberg, pp. 422,15-424.5); ver Sesiano (1999, pp. 23-24) y Vitrac (2005, p. 11 y ss.).

[39] Ver las diversas ediciones de los libros griegos: Tannery, Ver Eecke, Heath y la reciente en lengua española, que contiene los libros árabes. También, la edición de los libros árabes por Rashed (1984) y Sesiano (1982).

[40] Hipatia, hija de Teón de Alejandría, murió asesinada por una turba enloquecida en el año 415. Los libros griegos que conservamos provienen de una copia del *Comentario* escrito por ella misma. Ver Tannery (1974, I, pp. III-V, II, pp. XXII-XXIV), Heath (1910, pp. 14 y ss.).

[41] Acerca del hallazgo de estos libros, Rashed (1974, 1975, 1984, 1994) y Sesiano (1982). En opinión de Rashed (1974, p. 105), "al libro tercero de los manuscritos griegos le suceden los libros 4, 5, 6 y 7 del manuscrito árabe." Por el contrario, varios investigadores coinciden en que este manuscrito árabe es la traducción del *Comentario* de Hipatia a los seis primeros libros de la *Aritmética* (Christianidis 2007, p. 209).

[42] Christianidis (1991) apoya esta hipótesis en un escolio, debido a un autor anónimo, hallado en el tratado de Jámblico, *In Nichomachi Arithmeticam Introductionem liber*; también Knorr (1993).

tegia (odoς) consistirá en trasladar al *lenguaje teórico*[43] el enunciado y los datos del problema, estableciendo una igualdad de carácter general. Dispone además de un conjunto de herramientas sintácticas y morfológicas con las que maniobra hasta obtener una expresión más simple y la esperada solución. El lenguaje de la aritmética (distinto al utilizado para enunciar los problemas) se compone de signos y palabras abreviadas. Llama *arithmos* (ἀϱιθμός) al número desconocido, formado por una cantidad indeterminada de unidades, y lo identifica siempre con el mismo signo[44]: ς. Cuando introduce nuevas incógnitas, utiliza la misma letra, lo cual dificulta mucho la comprensión del texto. El término independiente se expresa mediante la unidad o Μόνάς, $\overset{0}{\mathrm{M}}$, seguido de un número[45]. El cuadrado (τετϱάγως)[46] es el número multiplicado por sí mismo; trasladado al lenguaje aritmético, toma el nombre de *potencia*; el lado del cuadrado (πλευϱά τού τετϱάγως), es el número que se identifica con la incógnita. Hay otros números compuestos: el cubo, formado por el producto de un número cuadrado por su lado. Se llama cuadrado-cuadrado al número cuadrado multiplicado por sí mismo. Cuadrado-cubo es el resultado de multiplicar un número cuadrado por el cubo del mismo lado. Cubo-cubo es el número formado por el producto de dos números cúbicos. Cuando todos estos números entran a formar parte de la teoría aritmética se escriben de modo abreviado: D^U, K^U, D^UD, DK^U, K^UK, y toman estos nombres: **du§namij**, **kubwn**, **dunamogunamewn**, **dunamokubwn**, **kubokubwn**, respectivamente[47]. Diofanto también describe los inversos de estos números y las operaciones realizadas con ellos. Asimismo, define los productos con cantidades *de distinto signo*: “lo que falta[48] multiplicado por lo que falta, nos da lo que es; mientras lo que falta multiplicado por lo que es nos da lo que falta”. El autor agrupa los números que sustraen detrás de un símbolo específico, colocando antes todas las magnitudes positivas.

Los enunciados de los problemas suelen proponer una condición general e indeterminada que Diofanto necesita concretar. Para ello, busca una expresión manejable escrita en función de la incógnita[49] con la cual compone su primera igualdad. Una vez establecida ésta, finaliza el proceso de invención[50] o **euresi**ς. Después, elimina de esa igualdad los términos negativos y agrupa los de la misma especie[51], hasta obtener la

---

43 Respecto a la metodología diofántica, leer a Christianidis (2007) y Thomaidis (2005).

44 Bashmakova & Smirnova señalan que este signo se encuentra en el Papiro Michigan (s. II d. C.) y en una tabla añadida a la colección *Geométrica* de Herón (2000, p. 38).

45 Como sabemos, los griegos utilizaban las letras de su alfabeto para designar los números. Sesiano (1999, pp. 17 y 18).

46 Simbolizado por Tannery con un cuadrado.

47 En los libros árabes se alcanza la octava potencia.

48 Algo que falta: *λεῖψις*. Aquello que posee existencia: *ὕπαρξις*.

49 Maniobra desarrollada por Diofanto, según Thomaidis (2005).

50 En opinión de Christianidis (2007).

51 Ambas reglas las conocemos con el nombre de *restauración* y *oposición*, desde que Al-Jwarizmi las enunció en su *Kitab al-jabr wa'l-muqabala* (aprox. 830 d. C.). Diofanto las describe en la introducción del libro I, en un párrafo denominado por Bachet de Méziriac Definición XI.

expresión que le conduce al resultado. A veces, necesita introducir valores falsos y magnitudes auxiliares, con la intención de proseguir su razonamiento. La estrategia de operar con cantidades supuestas (o método de falsa posición) proviene de las matemáticas babilónicas y egipcias[52].

Es también en la introducción[53] donde Diofanto anuncia un método nuevo para resolver igualdades en las que *una especie es igual a dos especies*, y asegura que explicará su mecánica en otro lugar. Sin embargo, en ninguno de los libros que conservamos se materializa este proyecto. Comprobaremos que se trata del procedimiento aritmético de completar el cuadrado de un binomio. A partir de este momento, Diofanto no necesitará dibujar diagramas para expresar las relaciones entre magnitudes ni utilizará segmentos para representar a los números[54].

7. Problemas analógicos

Únicamente hay cuatro problemas con estas características en la *Aritmética*. En ellos se pide encontrar dos números (naturales), una vez conocida la suma, diferencia o producto de ambos. Tanto los enunciados como la metodología aplicada coinciden con algunos ejercicios procedentes de la Antigua Babilonia (2000-1600 a. C.). Al no establecer como *arithmos* ninguno de los números buscados, la igualdad propuesta no es de segundo grado y, en consecuencia, Diofanto no puede ensayar aquí su recién descubierto algoritmo[55]. Todo lo contrario, introduce en estos problemas una condición geométrica que decide su posterior resolución.

- Ejercicio I.27: "Encontrar dos números tales que su suma y su producto formen dos números dados".
- Condición geométrica: "Siempre es necesario que el cuadrado de la semisuma de los números a encontrar exceda en un cuadrado al producto de esos números; *cosa que es, además, figurativa*"[56].

---

[52] Thureau-Dangin (1938); Li Ma (1993); Melville (2002).

[53] Definición XI.

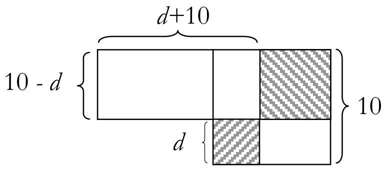
[54] Salvo en V.10. Bashmakova & Smirnova (ibid.) escriben: Diofanto rompe completamente con el álgebra geométrica, introduciendo símbolos especiales para las primeras seis potencias positivas (y negativas) de la incógnita, incluyendo la potencia cero.

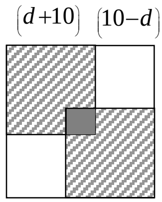
[55] Igualdades C para I. 27 y 28. Igualdad B para I.30.

[56] "**Dei dh twn euriskome`nwn ton apo tou hmideoj tou sunamfotegon tetragwnon tou up' autwn uperexein tetragwn%.** ***esti de touto plasmatikon.***" Esta última frase (en cursiva) ha suscitado bastantes comentarios. Bachet tradujo: "Est autem hoc plasmaticum"; Tannery (1974 I, p. 63) interpreta: "*hoc est formativum.*" En opinión de Ver Eecke, significa *susceptible de representación geométrica*, y pone en duda su autenticidad, afirmando que pudo ser añadida por un comentarista griego (1959, p. 37). Por su parte, Thomas Heath (1910, pp. 140-141) advierte que la palabra ***plasma*** significa algo "*formed* or *moulded*", traduciendo la expresión aludida por: "this is of the nature of a formula." Vitrac denomina *prosdiorismos* a esta condición y traduce la última frase como: "esto es también una condición formal" (2005, p. 21). Esta construcción geométrica es semejante a la que encontramos en Euclides, *Elementos* II.V.

– Proponemos que la suma de los números forme 20 unidades, y que su producto forme 96 unidades.
– Sea la diferencia de esos números igual a $2d$; la semisuma, 10 unidades:
  - o Número Mayor [L]: semisuma más semidiferencia
  - o Número Menor [l]: semisuma menos semidiferencia
– Deducción y algoritmo implícito (Fig. 16):

$\square$ (sobre 10) – $\boxed{\quad}$ (96) = $\square$ (sobre d); 100 – 96 = $\square$(sobre d)





Figuras 16 y 17

$$L = 10 + \sqrt{\square\,(\text{sobre } 10) - \boxed{\quad}\,(96)}$$

$$l = 10 - \sqrt{\square\,(\text{sobre } 10) - \boxed{\quad}\,(96)}$$

➢ Ejercicio I.28: “Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cuadrados formen números dados”.

– Condición geométrica: “Siempre es necesario que el doble de la suma de los cuadrados de los números exceda en un cuadrado al cuadrado de la suma los números; *cosa que es también figurativa*”[57].

– Proponemos que la suma de los números forme 20 unidades y que la suma de sus cuadrados forme 208 unidades.

– Sea la diferencia de esos números $2d$; la semisuma 10 unidades:
  - o Número Mayor: semidiferencia más semisuma
  - o Número Menor: semisuma menos semidiferencia
– Deducción (Fig. 17):

$$2 \cdot 208 = \square\,(\text{sobre } 2d) + \square\,(\text{sobre } 20) \rightarrow 208 = 2d^2 + 200; \quad d\,0 = 2$$

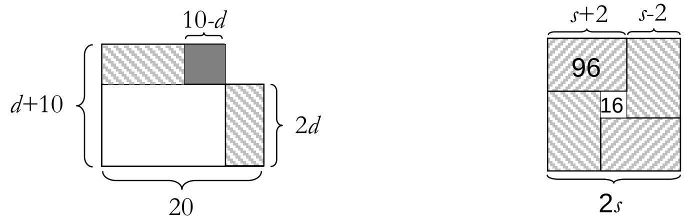
➢ Ejercicio I.29: “Encontrar dos números tales que su suma y la diferencia de sus cuadrados formen dos números dados”.

[57] “**Dei dh tou» dij ap autwn twn tetragwnouj tou apo sunamfoterou autwn tetragwnou uperexein tetragwn% . *esti de kai touto plasmatikon*.**”

– Proponemos que la suma de los números forme 20 unidades, y que la diferencia de los cuadrados de los números forme 80 unidades.

– Sea la diferencia de los números $2d$; la semisuma es 10:

- Número Mayor: semidiferencia más semisuma
- Número Menor: semisuma menos semidiferencia



Figuras 18 y 19

– Deducción (Fig. 18):

$$\left.\begin{array}{l}(d+10)+(10-d)=20\\[1em](d+10)-(10-d)=2d\end{array}\right\}\quad 80=\square\ [\text{sobre } (d+10)]-\square[\text{sobre } (10-d)]=40d$$

➢ Ejercicio I.30: "Encontrar dos números tales que su diferencia y su producto formen dos números dados".

– Condición geométrica: "Siempre es necesario que el cuádruplo del producto de los números, aumentado del cuadrado de su diferencia, forme un cuadrado; *cosa que es también figurativa*[58].

– Proponemos que la diferencia de los números sea 4 unidades, y que su producto sea 96 unidades; $2s$ es la diferencia:

- Número Mayor: semisuma [s] más semidiferencia
- Número Menor: semisuma [s] menos semidiferencia

– Deducción (Fig. 19):

$$(s+2)\cdot(s-2)=96=\square(\text{sobre } s)-4$$

El diagrama de la Figura 19 se utilizó también en algunos ejercicios procedentes de los períodos Arcaico y Seleúcida de Babilonia[59].

---

[58] "**Dei dh ton tetrakij up' autwn meta tou apo thj uperoxhj autwn poiein tetragwnon.** ***esti de kai touto plasmatikon***."

[59] Del período Arcaico es la tablilla YBC 6504, registrada en el Museo de la Universidad de Yale (Neugebauer *MKT* III, pp. 22 y ss.; Thureau-Dangin *TMB*, pp. 134 y ss.; Høyrup 2002, pp. 177 y ss.). BM 34568 procede del período Seleúcida y está depositada en el Museo Británico (Neugebauer *MKT* III, p. 14 y ss.; Thureau-Dangin *TMB*, pp. 57 y ss.; Høyrup 2002, pp. 391 y ss.).

8. Problemas con igualdades de las clases A y B

En este apartado vamos a analizar el tratamiento diofántico de las ecuaciones cuadráticas mixtas, o aquellas en las que *dos especies son iguales a una especie*[60]. Una vez enunciado el problema, Diofanto traslada al lenguaje aritmético sus condiciones y datos, expresados en función de la primera incógnita o *arithmos*. Iguala esta relación aritmética a una nueva expresión en la que aparece esa misma incógnita (aquí reside la parte más oscura y enigmática del método diofántico). Luego, establece la ecuación (o inecuación). Su estrategia consiste en componer sucesivamente, y según sea necesario, igualdades a las que aplica ambas reglas de restauración y oposición; introduce consecutivamente incógnitas y equivalencias auxiliares, hasta obtener una igualdad reducible a la expresión más simple[61]. Si de ésta no se obtiene la solución requerida, porque es de la clase anteriormente mencionada, incorpora un algoritmo que no define, sino que expresa de la siguiente manera:

> *El cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita, junto con el producto del término absoluto y el coeficiente del cuadrado de la incógnita, debe ser un número cuadrado.*

Y que, como sabemos, se deduce así:

$$ax^2 \pm bx = c \rightarrow (ax)^2 \pm b \cdot ax = ac$$

$$(ax)^2 \pm b \cdot ax + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax \pm \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \square$$

Nosotros vamos a dibujar un cuadrado, como hace Tannery, para aludir a un número cuadrado indeterminado (τετϱάγως), distinto de la potencia (**du§namij**). Aquí, sólo mostramos íntegramente el ejercicio IV.31. En los restantes indicaremos la ecuación cuadrática alcanzada y la introducción del algoritmo.

8.1. Problemas resueltos con el algoritmo:

- Ejercicio IV. 31: “Dividir la unidad en dos números, y añadir a cada uno de ellos un número dado, de manera que su producto forme un cuadrado”. Sean esos números 3 y 5.

– Ecuación inicial indeterminada; llamamos “x” al primer *arithmos*: $(x + 3) \cdot [(1 - x) + 5] = \square$

Sea este cuadrado igual a $4x^2$

– Ecuación cuadrática alcanzada (clase B): $3x + 18 = 5x^2$. Es irracional, porque el

[60] Tannery, p. 15

[61] Ver Thomaidis (2005); Christianidis (2007).

Algoritmo: $5 \cdot 18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \neq \square$

– Ecuación auxiliar: $3x + 18 = (\square + 1)x^2$

– Nuevo algoritmo: $[\square + 1] \cdot 18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \square$

– Procedimiento explícito y nueva incógnita o *arithmos*:

$$(n^2 + 1) \cdot 18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \square \rightarrow 18n^2 + 18 + \frac{9}{4} = \square \rightarrow 72\, n^2 + 81 = \square$$

– Sea $72n^2 + 81 = (8n + 9)^2 \rightarrow n = 18$

– Segunda ecuación mixta (clase B): $3x + 18 = (18^2 + 1)x^2 \rightarrow 3x + 18 = 325\, x^2$

– Solución directa: $x = \frac{78}{325} = \frac{6}{25}$; el otro número es $\frac{19}{25}$

➢ Ejercicio IV.39: "Encontrar tres números tales que la diferencia del mayor y el mediano tenga una relación dada con la diferencia del número mediano y el más pequeño, y tales que, tomados dos a dos, formen un cuadrado". Sea esta relación 3.

– Inecuación cuadrática (clase B): $6p + 18 < 2p^2$

– Algoritmo:

$$\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 2 \cdot 18} \quad 7 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 2 \cdot 18} + \frac{6}{2} \quad 10 \rightarrow p \quad \frac{\sqrt{45} + 3}{2};\ p \quad 5$$

➢ Ejercicio VI.6: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, aumentado en el número de una de las perpendiculares, forma un número dado". Sea ese número 7 unidades.

– Primera igualdad: $6x^2 + 3x = 7$

– Algoritmo: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot 7 \neq \square$

– Ecuación auxiliar con nuevo *arithmos* y algoritmo:

$$\frac{1}{2}(m \cdot 1)x^2 + 1x = 7 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{m}{2} = \square;\ 1 + 14m = \square$$

– Ecuación principal (clase A) y solución directa: $84x^2 + 7x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

➢ Ejercicio VI.7: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, disminuido en el número de una de las perpendiculares, forma un número dado". Sea ese número 7unidades.

– Ecuación principal (clase B) y solución directa: $84x^2 - 7x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

➢ Ejercicio VI.8: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, aumentado en el número compuesto por la suma de sus perpendiculares, forma un número dado". Sea ese número 6 unidades.

– Ecuación principal (clase A): $630x^2 + 73x = 6$ con solución implícita: $x = \frac{1}{18}$.

➢ Ejercicio VI.9: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, disminuido en el número compuesto por la suma de sus perpendiculares, forma un número dado". Sea ese número 6 unidades.

– Ecuación y algoritmo:

$$\frac{1}{2}(m \cdot 1)x^2 - (1 + m)x = 6 \rightarrow \left(\frac{1+m}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{m}{2} = \square \;;\; m^2 + 14m + 1 = \square$$

– Ecuación principal (clase B): $630x^2 - 73x = 6$

– Solución directa: $x = \frac{6}{35}$

➢ Ejercicio VI.10: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, aumentado en el número compuesto por la suma de la hipotenusa y una de las perpendiculares, forma un número dado". Sea ese número 4 unidades.

– Ecuación auxiliar y algoritmo:

$$\frac{1}{2}[1 \cdot (m + 1)]x^2 + (1 + h)x = 4 \rightarrow \left(\frac{1+h}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{m+1}{2} = \square$$

– Ecuación principal (clase A): $630x^2 + 81x = 4$

– Solución directa: $x = \frac{4}{105}$

➢ Ejercicio VI.11: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, disminuido del número compuesto por la suma de la hipotenusa y una de las perpendiculares, forma un número dado". Sea ese número 4 unidades[62].

– Ecuación auxiliar y algoritmo:

[62] Encontramos un ejercicio muy parecido en Thureau-Dangin (*TMB*, p. 62); se trata de una tablilla registrada en el Museo Británico con el número BM 34568 (17). También en Herón, *Geometrica* (ed. Heiberg, pp. 422,15-424.5); ver Sesiano (1999, pp. 23-24) y Vitrac (2005, p. 11 y ss.).

$$\frac{1}{2}[1 \cdot (m+1)]x^2 - (1+b)x = 4 \rightarrow \left(\frac{1+b}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{m+1}{2} = \square$$

– Ecuación principal (clase B): $630x^2 - 81x = 4$

– Solución directa: $x = \dfrac{1}{6}$

9. Problemas con ecuaciones cuadráticas de la clase C

1. Expresión del algoritmo en las igualdades del tipo C:

   El cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita, menos el producto del término absoluto y el coeficiente del cuadrado de la incógnita, debe ser un número cuadrado.

2. Posible cálculo algebraico:

$$ax^2 - c = bx \rightarrow (ax)^2 + ac = b \cdot ax$$

$$(ax)^2 + ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = b \cdot ax + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \square$$

9.1. Problema resuelto sin algoritmo

➢ Ejercicio IV.22: "Encontrar tres números tales que el número sólido formado por esos números, aumentándolo de cada uno de ellos, forma un cuadrado."

– Igualdad de la clase C: $4n - 4 = n^2$, y raíz: 2

9.2. Problemas resueltos con el algoritmo:

➢ Ejercicio V.10: "Dividir la unidad en dos partes, y añadir respectivamente a cada una de esas partes sendos números, de manera que formen un cuadrado." Sean esos números 2 y 6.

– Inecuaciones cuadráticas (clase C): $\begin{cases} 72n > 17n^2 + 17 \\ 72n < 19n^2 + 19 \end{cases}$

– Algoritmo explícito: $\sqrt{\left(\frac{72}{2}\right)^2 - 17 \cdot 17} \quad 31 \rightarrow 31 + \frac{72}{2} \quad 67 \rightarrow n \quad \frac{67}{17}$

– Algoritmo implícito: $\sqrt{\left(\frac{72}{2}\right)^2 - 19\cdot 19} \quad 30 \rightarrow 30 + \frac{72}{2} \quad 66 \rightarrow n \quad \frac{66}{19}$

– Solución: $\frac{66}{19} \quad n \quad \frac{67}{17} \rightarrow n = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

➢ Ejercicio[63] VI.22: "Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su perímetro sea un cubo, y que este perímetro, aumentado en el número del área del triángulo, forme un cuadrado." Sea el perímetro del triángulo 12 unidades y la superficie 7 unidades.

– Ecuación (clase C): $172x = 336x^2 + 24$

– Y un algoritmo imposible (negativo): $\left(\frac{172}{2}\right)^2 - 336 \cdot 24 \neq \square$

– Nuevo algoritmo: $\left[\frac{(64)^2 + 4m}{2}\right]^2 - 8 \cdot (64)^2\, m = \square$

– Deja al lector finalizar el ejercicio.

10. Conclusión

En este trabajo hemos repasado algunos ejercicios procedentes de la Antigua Babilonia (períodos arcaico y seleúcida)[64] en los que, aparentemente, intervienen ecuaciones cuadráticas. En realidad, no hubo una formalización explícita de tales ecuaciones, pero sí un método de resolución extraído directamente de la visualización de un diagrama. A la expresión que traduce su resultado la hemos denominado *algoritmo geométrico*, porque describe una composición o conjunto de figuras. Los matemáticos de Mesopotamia solían calcular los cuadrados de las semisumas y de las semidiferencias de las magnitudes buscadas, debido a que, mediante su representación gráfica, descubrían el rectángulo formado por el producto de ambas magnitudes. Muchos de los *algoritmos geométricos* aluden a estos términos. El procedimiento heurístico es analítico y evoluciona a través de figuras, como en la geometría. Una vez obtenidas las soluciones específicas de los ejercicios, no hay fase de generalización ni exposición sintética. Deducción y prueba son aquí la misma cosa. Al no haber una formalización de ecuaciones, no cabe esperar la aplicación de reglas de índole algebraica: agrupación de términos semejantes, eliminación de elementos idénticos, etc.

---

[63] Ejercicio análogo a BM 34568 (17), procedente del Período Seleúcida de la cultura babilónica.

[64] Casi todos los documentos matemáticos que conservamos proceden del período arcaico; algunos corresponden al período seleúcida; y muy pocos a la denominada "época oscura", intermedia entre ambas.

Diofanto de Alejandría trascendió la mera representación de números y magnitudes, expresando en el lenguaje teórico las condiciones anunciadas en los ejercicios. Formalizó igualdades y desigualdades a las que aplicó dos reglas de carácter algebraico. Propuso un *algoritmo aritmético* para resolver las ecuaciones en las que dos términos son iguales a un término (para nosotros, de segundo grado), pero desprovisto ahora de todo significado geométrico. Dicho algoritmo lo obtuvo mediante el desarrollo algebraico de completar el cuadrado, pero todavía pendiente de las limitaciones impuestas por sus predecesores. Así sólo consiguió extraer una solución (o raíz) de cada una de las igualdades establecidas (pues no había posibilidad de admitir cantidades negativas); y en las ecuaciones de la clase C, aunque existen dos *algoritmos geométricos*, su método le permitía obtener solamente una raíz.

Los matemáticos babilonios inferían dos incógnitas a partir de un mismo diagrama. Diofanto sólo podía obtener una raíz utilizando el procedimiento abstracto de completar el cuadrado. Si esto que decimos es cierto, comprenderemos por qué los ejercicios 27 a 30 del libro I de la *Aritmética* fueron tratados al modo tradicional: el *algoritmo aritmético* de Diofanto no añadía nada nuevo a lo que ya se sabía; y lo que es peor, solamente descubría una de las incógnitas.

ESQUEMA COMPARATIVO DE ESTRATEGIAS

EN MESOPOTAMIA (resolución de problemas en los que intervienen cuadrados)	DIOFANTO (resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas)
Enunciado particular de un ejercicio	Enunciado general de un ejercicio
Reconocimiento de las magnitudes	Reconocimiento de las magnitudes conocidas e identificación de la(s) incógnita(s)
En ocasiones, se introduce un factor y/o un valor falso para la incógnita	Incorporación de magnitudes equivalentes y/o provisionales. Uso de símbolos
Composición de un diagrama	Composición de una expresión aritmética abstracta
Proceso de cortar y pegar	Aplicación de reglas: restauración y oposición
	Introducción de nuevas incógnitas y magnitudes auxiliares. Aplicación de reglas
	Formalización de una igualdad abstracta

Algoritmo geométrico descriptivo, con visualización de las magnitudes	Algoritmo aritmético abstracto formado por cantidades numéricas
Cálculo y solución	Cálculo y solución
A veces, prueba	A veces, prueba

Así pues, la fórmula que propone Diofanto no es analógica ni descriptiva, como habían sido los algoritmos mesopotámicos, pues de su lectura no se infieren líneas y superficies. Tampoco posee el grado de generalidad que los matemáticos árabes le confirieron. Estos últimos trataron de justificar geométricamente cada una de sus reglas[65]. Diofanto intentaba, por el contrario, escapar de ese entorno en el que deducción y prueba poseían una naturaleza tangible, manipulable y empírica. Quiso transformar esa metodología en un conocimiento universal y teórico. Pero quizá su nuevo programa se alejaba demasiado del saber instituido y tuvo que restringirlo a unos pocos casos en los que los números buscados no eran otra cosa que entidades arbitrarias, sin anclaje al mundo real.[66]

REFERENCIAS

Bashmakova, I., y G. Smirnova (2000). *The Beginning and Evolution of Algebra.* The Mathematical Association of America

Baqir, T. (1950a). "An important mathematical problem text from Tell Harmal", *Sumer* 6, pp. 3-54.

——— (1950b). "An important mathematical problem text from Tell Harmal", *Sumer* 6, pp. 130-148.

Berggren, J.L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York: Springer Verlag.

Bruins, E.M., y M. Rutten (1961). *Textes mathématiques de Suse* (*TMS*). Mémoires de la Mission archéologique en Iran, XXXIV, Paris

Christianidis, J. (1991). " ¡Ariqmhtikh Stoixeiwsij : Un traité perdu de Diophante d' Alenxandrie ?", *Historia Mathematica* 18, pp. 239-246.

——— (2007). "The way of Diophantus: Some clarifications on Diophantus' method of solution", *Historia Mathematica* 34, pp. 289-305.

Damerow, P. (2001). "Kannten die Babylonier den Satz des Pythagoras?", en Høyrup and Damerow (eds.), *Changing views on Ancient Near Eastern Mathematics*, Berlin: Dietrich Reimer Verlag, pp. 219-310.

Diofanto de Alejandría (2008). *La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales*. Benito Muñoz, Fernández Moral, Sánchez Benito, eds. Madrid: Nivola Ediciones.

——— (1984). *Les Arithmétiques*. Roshdi Rashed, ed. Paris: Les Belles Lettres.

Friberg, J. (2000). "Mathematics at Ur in the Old Babylonian Period", *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* XCIV, pp. 97-189.

——— (2005). *Unexpected links between Egyptian and Babylonian Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

[65] Los algebristas árabes medievales, por el contrario, deseaban justificar sus procedimientos e incluyeron pruebas diagramáticas en sus obras. Berggren (1986); Parshall (1988); Klein (1992); Sesiano (1999); Bashmakova & Smirnova (2000); Moreno Castillo (2002).

[66] *Agradecimientos*: Quiero expresar mi reconocimiento a los profesores Santiago Garma, Javier de Lorenzo, César Sáenz, Juan Tarrés y Manuel Vegas. Asimismo, agradezco las observaciones y comentarios efectuados por los anónimos evaluadores de este artículo.

Gandz, S. (1937). "The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra", *Osiris* 3, 319-391.

Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra.* 2ª ed. facsimil de la de Cambridge. Chicago: Powell's Bookstore.

Herón de Alejandría (1912). *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia vol. IV.* G. Schmidt y J. Heiberg (eds.). Leipzig: Teubner, 1912; reimp.: Stuttgart, 1976.

Høyrup, J. (1997). "Hero, Ps.-Hero, and Near eastern Practical Geometry. An investigation of Metrica, Geometrica, and other treatises", en K. Döring, B. Herzhoff y G. Wöhrle (eds.), *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption*, Band 7. Trier: Wissenschaftlichen Verlag Trier

——— (2001). "On a Collection of geometrical Riddles and their Role in the Shaping of Four to Six *Algebras*", *Science in Context* 14, pp. 85-131.

——— (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin.* New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra,* Dover Publications**.**

Knorr, W.R. (1993). "Arithmêtikê stoicheiôsis: On Diophantus and Hero of Alexandria", *Historia Mathematica* 20, pp. 180-192.

Li, M. (1993). *The Rule of False: Early Applications and Conjectured Transmissions.* Göteborg: Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, University of Göteborg.

Melville, D.J. (2002). "Weighing Stones in Ancient Mesopotamia" , *Historia Mathematica* 29, pp. 1-12.

——— (2004). "Poles and Walls in Mesopotamian and Egypt", *Historia Mathematica* 31, pp. 148-162.

Moreno Castillo, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y matemático.* Madrid: Nivola.

Nemet, N. (1993). *Cuneiform Mathematical Texts as a Reflection of everyday Life in Mesopotamia.* New Haven, CT: American Oriental Society.

Neugebauer, O. (1935-1937). *Mathematische Keilschrif-Texte* (*MKT*), *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, 3 vols. Berlin: Julius Springer; reimp. 1973.

——— y A. Sachs (1945). *Mathematical Cuneiform Texts.* New Haven, CT: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research

Nissen, H.J., P. Damerow y R.K. Englund (1993). *Archaic Bookkeping: Early writing and techniques of economic administration in the Ancient Near East* **.** Chicago y Londres: University of Chicago Press.

Oppenheim, A.L., y E. Reiner (2000). *Ancient Mesopotamia: Portrait of a Dead Civilization.* Chicago: University of Chicago Press.

Parshall, K.H. (1988). "The Art of Algebra from Al-Khwarizmi to Viète: A Study in the Natural Selection of Ideas", *History of Science*, XXVI, pp. 129-164.

Rashed, R. (1974). "Les travaux perdus de Diophante (I)", *Revue d' Histoire des Sciences* XXVII, pp. 97-122

——— (1975). "Les travaux perdus de Diophante (II)", *Revue d' Histoire des Sciences* XXVIII, pp. 3-30.

——— (1994). "Notes sur la versión arabe des trois premiers livres des Arithmétiques de Diophante, et sur le problème 1.39", *Historia Scientiarum* 4 (1), pp. 39-46.

Robson, E. (1999). *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC: Technical Constants in Bureaucracy and Education.* Oxford: Clarendon Press.

Sesiano, J. (1982). *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusta ibn Luqa.* New York.

——— (1999). *Une introduction à l'histoire de l'algèbre.* Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Tannery, P. (1974). *Diophantvs Alexandrinvs, Opera Omnia.* Stuttgart: Teubner.

Thomaidis, Y. (2005). "A Framework for Defining the Generality of Diophantos' Methods in 'Arithmetica'", *Archive for the History of Exact Sciences* 59, pp. 591-640.

Thureau-Dangin (1938). "La méthode de fausse position et l'origine de l'algèbre", *Revue d'Assyriologie* XXXV, pp. 71-77.

——— (1938). *Textes mathématiques Bayloniens. TMB.* Leiden: Brill.

Ver Eecke, P. (1959). *Diophante d'Alexandrie, Les six libres arithmétiques et le libre des nombres polygones.* Paris: Blanchard.

Vitrac, B. (2005). "Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes?", *Mirror of Heritage (Ayene-ne Miras)* 3, pp. 1-44 .

Yuste, P. (2006)."Geometry for Trapezoids in the Old Babylonian Period: An Observation about Tablet IM 52301", *Historia Scientiarum* 16-2, pp. 128-143.

——— (2008). "Geometry in Mesopotamia and Genesis of Algorithms", *Historia Scientiarum* (próxima publicación).

Piedad YUSTE ha investigado e impartido docencia en el Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la UNED. Actualmente, es Profesora Ayudante Doctor. Su línea de investigación incide en la historia y filosofía de las matemáticas, principalmente, en la matemática creada en la Antigua Babilonia. Ha publicado artículos sobre el origen y desarrollo del álgebra, génesis de algoritmos y evolución del cálculo, en *Theoria*, *Centaurus*, *Historia Scientiarum*, *Éndoxa* y *Revista Española de Física*.

DIRECCIÓN: Dpto. de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia, Facultad de Filosofía, UNED. Paseo Senda del Rey, nº 7, Madrid 28040. E-mail: pyuste@bec.uned.es.