Estudio geométrico de AO 17264

(Geometric Study of Tablet AO 17264)

Piedad YUSTE

Manuscrito recibido: 2002.07.05
Versión final: 2002.07.05

BIBLID [0495-4548 (2005) 20: 52; pp. 45-67]

RESUMEN. Con la ayuda de un diagrama y aplicando la fórmula del agrimensor, los matemáticos de la Antigua Babilonia descubrieron un método sencillo y elegante de bisecar figuras trapezoidales. En este trabajo intentaremos demostrar, únicamente como conjetura, que en el "Problema de los Seis hermanos" - Tablilla AO 17264 - se pudo haber manejado este mismo procedimiento, aunque ampliado y generalizado.

Descriptores: Matemática babilónica, Tablilla AO 17264, Problema de los seis hermanos, Tablilla YBC 4675, Geometría Antigua, Partición de trapecios, Trapecios bisecados.

ABSTRACT. *The Mathematicians of the Old Babylonian Period, with the aid of a diagram and applying the surveyor formula, discovered a simple and smart method to bisect trapezoidal figures. In this paper, we will try to demonstrate, only as a conjecture, that in the Problem of Six Brothers, Tablet AO 17264, it could be used the same procedure, although extended and generalized.*

Keywords: *Babylonian Mathematics, Tablet AO 17264, Problem of the Six Brothers, Tablet YBC 4675, Ancient Geometry, Trapezoidal Partition, Bisectable Trapezia.*

Introducción

El problema de *Los seis hermanos* es uno de los más bellos y enigmáticos de la geometría babilónica; según Neugebauer, procede de Uruk (Warka) y seguramente debió componerse en el Período casita, hacia mediados del segundo milenio antes de nuestra era. Este problema plantea el modo de repartir un campo trapezoidal entre seis hermanos, sin especificar en qué proporción ni bajo qué reglas o normas ha a realizarse ese reparto; sólo exige que a los hermanos de la misma edad [1] les corresponda una parte equivalente de terreno. El misterio de la Tablilla AO 17264 reside precisamente en lo incomprensible de sus dos primeras fórmulas, con las que el escriba pretende hallar las dos primeras líneas transversales que seccionan en tres partes distintas ese trapecio. Mientras las restantes líneas, las que fraccionan por la mitad cada una de esas partes, se hallan aplicando una sencilla fórmula cuyo origen desconocemos [2].

En este trabajo, analizaremos primero el método de bisecar trapecios, tal como se desprende de la lectura de YBC 4675. Después, veremos que su generalización nos facilita el modo de hallar las líneas que describen partes proporcionales en figuras trape-

[1] Se trata de tres parejas de hermanos gemelos.

[2] $t^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

zoidales y cuadrangulares. Y por último, analizaremos la Tablilla AO 17264 bajo dos aspectos diferentes: 1) Según los principios de la geometría euclídea. 2) Desde lo que imaginamos sería la perspectiva de un matemático de la Antigua Babilonia.

Debemos advertir que este método se ajusta a dos condiciones previas:

- Aplicación de la fórmula del agrimensor
- Conversión de la figura inicial en un trapecio rectangular, o quizá en otro isósceles, según son denominados hoy en día

Obviamente, la segunda se sigue de la primera, y ambas prácticas se detectan en los textos mencionados. Como la medida de las líneas transversales no depende de la altitud del trapecio, sino de las anchuras del mismo, la resolución de los problemas que veremos aquí es indiferente al cálculo de la altura en función de la regla pitagórica; por tanto, elude la problemática acerca de si se disponía o no de ese enunciado al componer dichos ejercicios [3]. Así, aunque el uso de la fórmula del agrimensor introduce un error considerable en la estimación de las áreas, esto no influye en la longitud de las transversales.

Si manejamos aquí un lenguaje formalizado, tan lejano al descrito en las tablillas de arcilla, es con el propósito de mostrar cómo los matemáticos babilonios de los Períodos Antiguo y Medio supieron imaginar y construir métodos, progresivamente más complejos, para resolver cuestiones geométricas, no siempre adscritas a la actividad cotidiana, llegando a alcanzar soluciones tan abstractas y hermosas que sólo una inspección rápida y superficial del texto podría ocultar. Por esta razón, he preferido sustituir los datos concretos de cada ejercicio por letras, y las operaciones por expresiones algebraicas, aunque no se ha prescindido de los cálculos aritméticos.

Por otra parte, los ejercicios que vamos a revisar han sido analizados y estudiados cuidadosamente por eminentes especialistas y ninguno de aquellos parece suscitar substanciales dudas acerca de su traducción y significado. Debido a ello, tomo como buenas las transliteraciones y traducciones citadas en este trabajo, pues no pretendo discutir cuestiones de carácter filológico, sino mostrar la manera en que pudo haber sido resuelto un problema geométrico. En consecuencia, dejo a los asiriólogos que juzguen si lo presentado aquí concuerda con sus deducciones.

---

[3] Peter Damerow expresa sus dudas respecto al posible conocimiento de la regla pitagórica a la hora de calcular la altura de los trapecios (Damerow 2001). Sin embargo, se conocía la manera de componer triples pitagóricos, como en Plimptom 322 (Neugebauer *MCT*, pp. 37-42; Robson 2001 y 2002) y, en ocasiones, se resolvieron ejercicios aplicando esta fórmula (Høyrup 1990 y 2002 a, pp. 254-277).

1. Método YBC 4675

El que vamos a llamar desde ahora *Método YBC 4675*, viene esbozado en esta misma tablilla [4], aunque no de un modo explícito. Pero siguiendo paso a paso las instrucciones del escriba lo obtendremos fácilmente [5].

Utilizaremos la notación propuesta por Otto Neugebauer, quien separa las diversas potencias de sesenta mediante comas, y utiliza el punto y coma para diferenciar las cantidades enteras de las fraccionarias [6]:

$$x, y, z; m, n_{(60} \approx x \cdot 60^2 + y \cdot 60 + z + m \cdot 60^{-1} + n \cdot 60^{-2}{}_{(10}$$

El texto pide hallar la longitud de la línea que divide una figura o campo cuadrangular en dos partes equivalentes y muestra una figura como la siguiente:

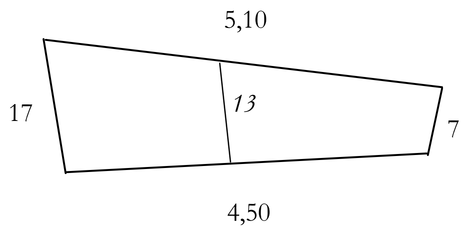

Figura 1

Luego, requiere la medida de cada uno de los segmentos laterales, de los cuales no nos ocuparemos en este trabajo.

Como veremos después, esta figura será manejada como si se tratara de un trapecio rectangular (fig. 2) al que llamamos *S*, que conserva las mismas anchuras pero cuya altitud es igual al promedio de las longitudes. Esto no es extraño en la geometría que estudiamos, la cual aplica la fórmula del agrimensor a las superficies cuadrangulares y

[4] Neugebauer (*MCT*, pp. 44-48). Bruins (1952, p. 16); Caveing (1993, pp. 147-148); Brack-Bernsen & Schmidt (1990, p. 3.); Van der Waerden (1983).

[5] Jens Høyrup ha explicado geométricamente el significado de esta tablilla (1985, pp.105. 24-44 y 2002a, pp. 244-249). Nosotros asumimos plenamente la perspectiva con la que él analiza esta matemática, paralela a la ya clásica interpretación algebraica de Neugebauer y Thureau-Dangin.

[6] Thureau-Dangin utiliza una notación distinta, basada en grados, minutos y segundos. El sistema de numeración en este período era ya posicional, aunque en las tablillas no se hacía distinción entre las diversas potencias de 60; de ahí la dificultad de identificar los números y distinguir los enteros de las fracciones. Se utilizaban sólo dos signos para expresar los números: uno para las decenas y otro para las unidades y las potencias de 60; tampoco se conocía el cero. Ver Sarton (1980), Neugebauer (1969) y Nissen, Damerow & Englund (1993).

trapezoidales [7]: las áreas de éstas son el resultado de multiplicar las medias aritméticas de los lados opuestos:

$$S = \left(\frac{5{,}10 + 4{,}50}{2} \right) \cdot \left(\frac{7 + 17}{2} \right) = 1{,}0{,}0$$

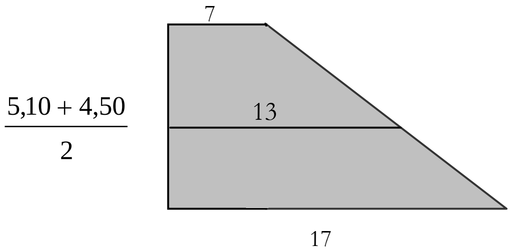

Figura 2

En realidad, como en tantos otros casos, la figura 1 representada en la tablilla no obedece a las medidas propuestas por el escriba, lo cual no impedirá comprender el argumento desarrollado. Los antiguos babilonios no efectuaban divisiones; es decir, para calcular un cociente, multiplicaban por la cantidad inversa; aquí, cuando se trata de invertir una cantidad, *n*, preferimos escribir $\frac{1}{n}$, en lugar de $\frac{1{,}0}{n}$ ó $\bar{n}$.

Lectura de la tablilla: [8] *Cara anversa:*

1. *If a surface, length length holds, the first length 5,10, the second length 4,50,*

šum-ma a.ša uš uš i.gu$_7$ uš.1.e 5.10 uš.2.e 4.50

2. *the upper width 17, the lower width 7, its surface 2* bùr.

saġ an.ta *17* saġ ki.ta *7* a.ša.bi *2*(bùr)^{iku}

3. *1* bùr *each, the surface I have divided into two, the middle crossbeam corresponding to what?*

1(bùr)^{iku} .ta.àm a.šà^{lam} *a-na ši-na ‹a-›zu-ú-uz ta-al-li qá-ab-lu-ú ki ma-ṣi*

[7] Ver, por ejemplo, YBC 7290 (Neugebauer *MCT*, p. 44).

[8] Traducción y transliteración de Høyrup (2002a, pp. 245-246). Las sílabas escritas en cursiva pertenecen a la lengua acadia; las otras son logogramas de origen sumerio.

4. *The longer length and the sorter length corresponding to what may I posit*

uš gíd.da *ù* uš lugúd.da *ki ma-ṣi lu-uš-ku-un-ma*

5. *in order that 1 bùr be bordering? And to the second* bùr

1(bùr)iku *lu-ú sà-ni-iq ù a-na 1*(bùr)iku *ša-ni-im*

6. *corresponding to what the longer length and the sorter length may I posit*

ki ma-ṣi uš gíd.da *ù ki ma-ṣi* uš lugúd.da *lu-uš-ku-un-ma*

7. *in order that 1* bùr *be bordering? The complete lengths,*

1(bùr)iku *lu-ú-sà-ni-iq* uš.ḫa *ga-me-ru-ú-tim*

8. *both, you accumulate, [the]ir moiety you break:*

ki-la-a-al-le-e-en ta-ka-mar-ma ba-a-[ši-n]a te-ḫe-pe-e-ma

9. *5,0 comes up for you.* Igi *5,0 which came up for you you detach:*

5 i-il-li-a-kum igi *ša I-li-a-ku[m t]a-pa-ta-ar-ma*

10. *(as) to the upper width which 10 over the lower width goes beyond,*

a-na saġ an-na *ša 10 e-li* saġ ki.ta *i-te-ru*

11. *to 10 the overgoing you raise: 2,0 it gives you.* 〈*¿Raise to 1,0,0, the complete surface, 2,0 it gives you?*〉

a-na 10 wa-at-ri-im ta-na-aš-ši-ma 2 I-na-an-di-kum ‹…›

12. *You tourn around. 17, the upper width, you make hold:*

ta-as-sà-ḫa-ar 17 saġ an.na *tu-uš-ta-ak-ka-al-ma*

13. *4,49 comes up for you. From inside 4,49,*

4.49 i-il-li-a-kum I-na li-ib-bi 4.49

14. *2,0 tear out: 2,49 the re[s]t.*

2 ta-ḫa-ar-ra-as-ma 2.49 a-ḫe-er-[t]um

15. *Its equalside you take:*

íb.si$_8$-*šu te-le-qé-e-ma*

16. *13, the middle crossbeam, comes up for you.*

13 ta-al-lam qááb-li-a-am ša i-li-a-[*kum*]

Sea:

L, la primera longitud: 5,10

l, la segunda longitud: 4,50

B, es la anchura superior: 17

b, la anchura inferior: 7

S, es la superficie falsa de la figura

Las instrucciones del escriba sugieren las siguientes operaciones (expresadas simbólicamente):

7-8. Hallar el promedio de las longitudes: $\frac{L+l}{2}$

9. Invertir esa cantidad: $\frac{1}{(L+l)/2}$

9-11. Multiplicar el resultado por la diferencia de las anchuras: $\frac{1}{(L+l)/2}\cdot(B-b)$

12-13. Calcular el cuadrado de B

13-14. Sustraer de este cuadrado la anterior cantidad: $B^2-\frac{1}{(L+l)/2}\cdot(B-b)$

15-16. Resultado final (*equalside* o lado del cuadrado):

$$d=\sqrt{B^2-\frac{1}{(L+l)/2}\cdot(B-b)\cdot S} \qquad [\mathrm{I}]$$

O bien, $$d^2=B^2-\frac{B-b}{(L+l)/2}\cdot S \qquad [1]$$

En el texto, no se incluye la cantidad S, porque ésta mide 1,0,0 SAR; es decir, 1 para el escriba [9], aunque la unidad métrica mencionada es el bùr. En la línea 2 se especifica que S = 2 bùr, esto es: (30,0 + 30,0) SAR = 1,0,0 SAR. En el ejercicio AO 17264 también comprobaremos que el escriba omite multiplicar por 1,0 (60 en base decimal).

A las expresiones algebraicas obtenidas tras reunir todas las operaciones aritméticas indicadas en la tablilla las vamos a llamar fórmulas, para destacar su carácter general; realizando una lectura geométrica de las mismas, en su conjunto, comprenderemos su

[9] Ver Neugebauer (*MCT*, p. 47). El SAR es una medida de superficie y equivale a 1 GAR x 1 GAR; un bùr equivale a 30,0 SAR. El GAR medía alrededor de 6 metros. Todas estas unidades métricas son de origen sumerio (*MCT*, pp. 4 -10).

significado. La ecuación [I] parece incomprensible si observamos la figura 1; pero en el diagrama que mostramos a continuación descubrimos su sentido [10]:

Construimos un cuadrado de lado igual a la anchura superior, *B*; en él, inscribimos otro cuadrado menor de lado *b*, y después, trazamos la línea *d* tal que divida al trapecio Σ, de bases *B* y *b*, en superficies equivalentes.

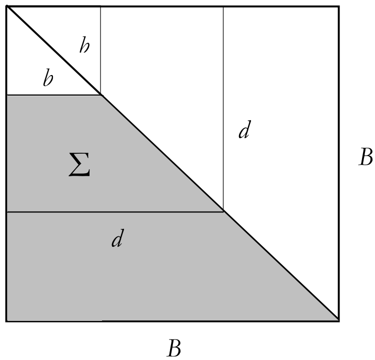

Diagrama I

En este diagrama observamos que el cuadrado de *d* es igual al cuadrado de *B* menos la sección compuesta por los dos trapecios rectangulares de bases *d* y *B*. Pero como ambos son iguales y cada uno de ellos equivale a la superficie del trapecio (*b, d*), podemos afirmar que el cuadrado de *d* es lo mismo que la diferencia entre el cuadrado de *B* menos el trapecio de bases *B* y *b,* y que hemos llamado Σ. La expresión [I] a la que llega el escriba, determinada por la falsa superficie de la figura dada, *S,* sugiere, como Jens Høyrup ha señalado, que aquel prefiere mostrar su fórmula en relación a la figura inicial mediante la aplicación de un proceso de reducción o aumento de la misma. Este factor de conversión se define por el cociente de las respectivas altitudes de los trapecios *S* y Σ: $\frac{B-b}{(L+l)/2}$.

Comprobamos ahora los cálculos que aparecen en la tablilla:

$$d = \sqrt{5{,}10^2 - \frac{1}{(17+7)/2}\cdot(5{,}10-4{,}50)\cdot 1{,}0{,}0} = 13$$

El paso de la figura original a Σ se justifica si comprendemos que los babilonios deseaban expresar la magnitud del primer trapecio en función del producto de los

[10] Høyrup (1985, pp. 105.31 y 2002a, p. 247).

promedios de los lados opuestos; este escollo queda salvado porque las proporciones numéricas se mantienen siempre.

Se han elaborado numerosas e interesantes interpretaciones acerca de este problema [11], sin embargo, ninguna de ellas se adapta tanto como la que acabamos de explicar (idéntica a la de Høyrup) a las indicaciones del escriba. Por tanto, creo suficientemente demostrado que el método desarrollado mediante el diagrama I fue conocido y utilizado por los antiguos geómetras babilonios para bisecar figuras cuadrangulares y trapecios [12]; aunque esto no impide que, en otras ocasiones, recurrieran a diagramas como el de los cuadrados concéntricos mencionado también por Høyrup [13]. No obstante, a mi modo de ver, el método YBC 4675 es el más sencillo y directo de bisecar trapecios, como veremos después en AO 17264.

De la fórmula [I] a la bien conocida expresión [14]

$$d^2 = \frac{B^2 + b^2}{2} \qquad \text{[II]}$$

pasamos algebraicamente sin ninguna dificultad:

$$d^2 = B^2 - \frac{B - b}{L - l/2} \cdot \frac{B + b}{2} \cdot \frac{L + l}{2} = B^2 - \frac{B^2 - b^2}{2} = \frac{B^2 + b^2}{2}$$

Aunque los agrimensores y matemáticos mesopotámicos debieron alcanzarla, obviamente, de un modo práctico; no sabemos si a partir del diagrama I ó mediante la construcción de dos cuadrados concéntricos de lados, respectivamente, *B* y *b*. Si comparamos ambas fórmulas [I] y [II], observamos que la segunda es más sintética y universal que la primera, pues solamente precisa conocer dos longitudes o anchuras (podemos girar la figura) para determinar la transversal buscada. Todo esto nos induce a pensar que la expresión [I] es conceptualmente anterior a la [II].

2. *Aplicaciones y generalizaciones*

El diagrama I nos facilita el cálculo de las líneas transversales que bisecan trapecios, pues su medida no depende del error cometido al utilizar la regla del agrimensor. El ejercicio anterior ordenaba fragmentar la figura original en dos partes equivalentes; sin embargo, ¿serviría este mismo método para trabajar con otras proporciones diferentes

---

[11] Neugebauer (*MCT*, p. 47); Bruins (1952, p. 16); Sánchez Pérez (1945, p. 22); Caveing (1993, pp. 147-148); Brack-Bernsen & Schmidt (1990, p. 3); Van der Waerden (1983).

[12] Este método se utilizó en TMS XXVI y TMS XXIII, además de otros muchos ejercicios (Muroi 2001; Høyrup 2003; Yuste 2003 y 2004). En opinión de Høyrup, sus orígenes se remontan a las antiguas prácticas de agrimensura (1990).

[13] Høyrup (2001, p. 97 y 2002a, p. 237).

[14] Esta es la igualdad que propone Neugebauer en su lectura de la tablilla (*MCT*, p. 47).

a la anterior? Es decir, ¿podríamos aplicar el diagrama I para determinar la línea transversal que corta la superficie dada en secciones $\frac{m}{n}S$ y $\frac{n-m}{n}S$? Creemos que sí.

I) Expresado algebraicamente, podemos afirmar que si la línea *d* divide el trapecio *S* (o cualquier otra figura cuadrangular) en partes $S_1 = \frac{m}{n}S$ y $S_2 = \frac{n-m}{n}S$, la construcción del diagrama II nos proporciona la solución:

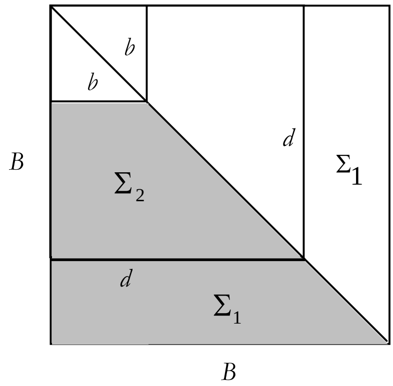

Diagrama II

Aquí, $\Sigma_1 = \frac{B-b}{L+l/2} \cdot \frac{m}{n}S$ y $\Sigma_2 = \frac{B-b}{L+l/2} \cdot \frac{n-m}{n}S$

Por tanto, $d^2 = B^2 - 2\frac{m}{n}\Sigma$

Siendo $\Sigma = \frac{B+b}{2} \cdot (B-b)$ ó $\Sigma = \frac{B-b}{L+l/2}S$

Es decir,

$$d^2 = B^2 - 2\frac{m}{n} \cdot \frac{B+b}{2} \cdot (B-b)$$

$$d^2 = B^2 - \frac{m}{n} \cdot \left(B^2 - b^2\right)$$

Obteniendo la expresión general:

$$d^2 = \frac{n-m}{n} B^2 + \frac{m}{n} b^2 \qquad [2]$$

Pero aún no sabemos si en aquella época se logró este enunciado, el cual supone una generalización de la ya mencionada fórmula [II].

II) También podríamos calcular las líneas que cortan un campo o figura trapezoidal disponiendo de la proporción en la que vamos a dividir el promedio de las anchuras, $\frac{L+l}{2}$, o magnitud denominada altitud del trapecio rectangular.
Llamando a cada uno de los segmentos de esa altitud:

$$h_1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{L+l}{2}; \quad h_2 = \frac{p}{n} \cdot \frac{L+l}{2}; \quad h_3 = \frac{s}{n} \cdot \frac{L+l}{2}; \text{etc.,}$$

las longitudes correspondientes en el trapecio Σ serán

$$\mathrm{h}_1 = \frac{B-b}{\left(L+l\right)/2} \cdot h_1; \quad \mathrm{h}_2 = \frac{B-b}{\left(L+l\right)/2} \cdot h_2; \quad \mathrm{h}_3 = \frac{B-b}{\left(L+l\right)/2} \cdot h_3$$

Todo esto lo comprobamos en el diagrama III:

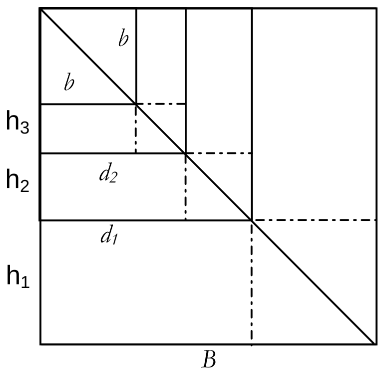

Diagrama III

A partir del cual, conseguimos fácilmente las longitudes d_1 y d_2:

$$d_1 = B - h_1$$

$$d_2 = d_1 - h_2$$

Pero, insisto, esto es solamente un avance de lo que se lograría aplicando el método YBC 4675, pues nada indica *todavía* que los antiguos matemáticos babilonios manejaran los diagramas II y III.

Continuando con nuestro anacrónico lenguaje algebraico, deducimos una fórmula general muy parecida a la que habíamos numerado [2]:

$$d = \frac{n-m}{n}B + \frac{m}{n}b \qquad [3]$$

Porque si

$$h_1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{L+l}{2} \cdot \frac{B-b}{(L+l)/2} = \frac{m}{n} \cdot (B-b)$$

$$d_1 = B - \frac{m}{n} \cdot (B-b) = \frac{n-m}{n}B + \frac{m}{n}b$$

Lógicamente, los matemáticos babilonios no disponían de un aparato algebraico semejante; sin embargo, si fueron capaces de concebir y utilizar el diagrama I, ¿por qué no iban a hacer otro tanto con el II y el III? Esto lo comprobaremos en el análisis de AO 7264.

3. Tablilla AO 17264

Una vez expuesta la posibilidad de que ese método fuera desarrollado y ampliado, investigaremos si el ejercicio propuesto en AO 17264 lo aplica de alguna manera o hace alusión al mismo. Tomaremos la traducción de Thureau-Dangin [15], la cual no discrepa demasiado respecto de la versión de Neugebauer [16]. El texto plantea, como sabemos, un reparto de tierras, pero sin referirse en ningún momento a cómo ni en qué proporción ha de realizarse la partición [17]:

---

[15] Thureau-Dangin (*TMB*, pp. 74-76 y *Revue d'Assyriologie* XXXI, 61 y ss.).

[16] Neugebauer (*MKT* I, pp. 126-134). También, Bruins (1952, pp. 15-16); Gandz (1948, pp. 23-30); Goetsch (1968-9, pp. 106-107); Caveing (1985 y 1993); Brack-Bernsen & Schmidt (1990). Nosotros usamos la notación de Neugebauer.

[17] "In central and southern Babylonia and Mari, the eldest received a larger share, sometimes even a double share." (Nemet-Nejat 1993, p. 68).

h̲i-uš [18]*)-rum 2.15 <šiddu> elû 1.21 šiddu šaplû 3.33 pû[tu elîtu]*

51 pûtu šaplîtu 6 ah̲ânu^{pl} *rabû ù tardênu mith̲aru šalšu ù [re]bû mit[h̲aru]*

h̲amšu ù šeššu mith̲aru li-ma-tu pirku^{pl} *ù mu-ut-ta-ri-da-tu*

minû atta ina epêšika 3.33 pûta elîta ù 51 pûta šaplîta

kumur-ma 4.24 i-banni [19]*) tu-úr-ma igi 2.15 šiddi puṭur-ma 26.40*

i-banni 26.40 a-na 1.21 šiddi <šaplî> i-ši-ma 36 i-banni 36 a-na 4.24 k i –t a [20]

ṣib-ma 4.24.36 i-banni tu-úr-ma 2.15 šidda elâ ù

1.21 šidda šaplâ kumur-ma 3.36 i-banni 3.36 h̲e-pé-ma 1.48

i-banni igi 1.48 puṭur-ma 33.20 i-banni 33.20 a-na 4.24.36

i-ši-ma 2.27 i-banni 2.27 pirku šanû tu-úr-ma 2.15 šiddu elû

eli 1.21 šiddi šaplî minâ îter 54 îter 54 i-na 2.27 pirki šanî

usuh̲-ma 1.33 šapiltu 1.33 šapiltu pirku rebû tu-úr-ma

....

Un ... Le flanc supérieur est 2,15, le flanc inférieur 1,21, le fr[ont supérieur] 3,33, le fr[ont] inférieur 51. 6 frères: l'aîné et le second sont égaux; le troisième et le quatrième sont é[gaux]; le cinquième et le sixième sont égaux. Que sont les limites, (c'est-à-dire) les transversales et les descendantes [21]?

Indudablemente, se trata de dividir un trapecio irregular (fig. 3), primero, en tres partes de áreas diferentes y luego, cada una de éstas por la mitad, mediante líneas transversales que delimitan cada trozo:

[18] Thureau-Dangin anota: "Ce signe, qui est l'idéogramme de *šiddu,* ne parait pas à sa place. Il faut, apparemment, le trasposer après 2,15".

[19] Ibid.: "Ecrit: *i*-k a k, le lecture est tot à fait conjéturale".

[20] Ibid.: "Ce idéogramme (= *šaplû*) n'est pas ici à sa place et dois être reporté un peu plus haut (après *šiddi*)".

[21] (*TMB*, 75 y *Revue d'Assyriologie* XXXI, 66 ff.).

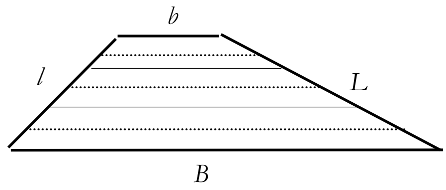

Figura 3

El escriba abordará después el modo de conseguir los respectivos segmentos laterales de las áreas parciales, aplicando la misma proporción que usó para calcular las dos primeras líneas, aunque este último apartado no se estudia aquí, pues cae fuera del propósito de este trabajo [22].

A. Indicaciones propuestas por el escriba para calcular la primera transversal, t_1 *(líneas 4 a 10):*

> Toi, en opérant, additionne 3,33, le front supérieur, et 51, le front inférieur, cela fera 4,24. D'autre part, dénoue l'inverse de 2,15, le flanc, cela fera 0;0,26,40. Porte 0;0,26,40 à 1,21, le flanc <inférieur> cela fera 0;36. Ajoute 0;36 à 4,24, cela fera 4,24;36. D'autre part, additionne 2,15, le flanc supérieur, et 1,21, le flanc inférieur, cela fera 3,36. Fractionne en deux 3,36, cela fera 1,48. Dénoue l'inverse de 1,48, cela fera 0;0,33,20. Porte 0;0,33,20 à 4,24;36, cela fera 2;27. La deuxième transversale est 2,27.

[Thureau-Dangin nos aclara que estas longitudes determinan un trapecio irregular, pues el texto no está acompañado de ninguna figura; asimismo, advierte que el sistema de numeración sumerio impide distinguir con claridad cantidades como 2;27 y 2,27 (línea 10)] [23]. Resumidas algebraicamente, las instrucciones del escriba son:

4-5. $B + b = 3{,}33 + 51 = 4{,}24$

5. $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{2{,}15} = 0;0{,}26{,}40$

6. $\left(l \cdot \dfrac{1}{L} \right) = (1{,}21) \cdot (0;0{,}26{,}40) = 0;36$

6-7. $B + b + \dfrac{l}{L} = 4{,}24 + 0;36 = 4{,}24;36$

---

[22] Aparentemente, se aplicó un argumento de semejanza de triángulos para resolver esta cuestión; sin embargo, si hubiera sido así no se entiende por qué no se utilizó también para calcular las dos primeras transversales, ya que la aparición de la media aritmética de las longitudes descarta esta posibilidad.

[23] Ya advertimos que la notación numérica no distinguía entre las diversas potencias de 60.

7-8. $\dfrac{L+l}{2}=(2{,}15+1{,}21)\cdot 0;30=1{,}48$

9. $\dfrac{1}{(L+l)/2}=\dfrac{1}{1{,}48}=0;0{,}33{,}20$

9-10. $\left(B+b+\dfrac{l}{L}\right)\cdot\dfrac{1}{(L+l)/2}=(4{,}24;36)\cdot 0;0{,}33{,}20=2;27$

10. [Multiplicar esto por 1,0]: 2,27

Obteniendo la siguiente fórmula algebraica:

$$t_1=\left(B+b+\frac{l}{L}\right)\cdot\frac{1}{(L+l)/2}\cdot 1{,}0=2{,}27 \qquad \text{[III]}$$

$$t_1=\left(3{,}33+51+\frac{1{,}21}{2{,}15}\right)\cdot\frac{1}{1{,}48}\cdot 1{,}0 \qquad \text{[IV]}$$

B. Instrucciones para hallar la segunda transversal, t_2 *(líneas 10 a 12):*

> D'autre part, de quoi 2,15, le flanc supérieur, excede 1,21, le flanc inférieur? Il excède de 54. Soustrais 54 de 2,27, la deuxième transversale: le reste est 1,33. La quatrième transversale est 1,33, le reste.

Algebraicamente:

$$L-l=t_1-t_2 \qquad \text{[V]}$$

$$2{,}15-1{,}21=2{,}27-t_2 \qquad \text{[VI]}$$

Ambas fórmulas, [III] y [V], en principio, parecen incomprensibles y en muchas ocasiones se las ha calificado de superfluas e incoherentes, introducidas con el único propósito de conseguir determinadas cantidades, fijadas de antemano y sin el respaldo de una deducción geométrica previa; aún más, a veces se ha pensado que el ejercicio desarrollado en AO 17264 encubre la búsqueda de números que satisfacen ciertas relaciones algebraicas [24]. No obstante, las longitudes obtenidas para cada una de las transversales se ajustan a una secuencia numérica y el trapecio así dividido se atiene a las normas de un reparto proporcional.

---

[24] En opinión de Caveing, este ejercicio encubre una cuestión de triples pitagóricos (1985 y 1993). Un estudio de trapecios bisecables en Brack-Bernsen & Schmidt (1990). Acerca de ejercicios y tablillas relacionadas con trapecios en Friberg (1990, pp. 531-585)

Para desvelar su misterio, someteremos el trapecio y sus transversales al análisis de la geometría euclídea, sin afirmar en ningún momento que los matemáticos babilonios concibieran una prototeoría de semejanza de triángulos. Una vez descubiertas sus propiedades, trataremos de encontrar un sentido y justificación a este problema, aplicando el método YBC 4675.

4. Discusión euclidiana

La fórmula [III] introduce el elemento que caracteriza la aplicación de la regla del agrimensor al cálculo de superficies cuadrangulares: el promedio de los lados opuestos $\left(h = \frac{L+l}{2}\right)$; aunque aquí se menciona solamente su valor inverso.

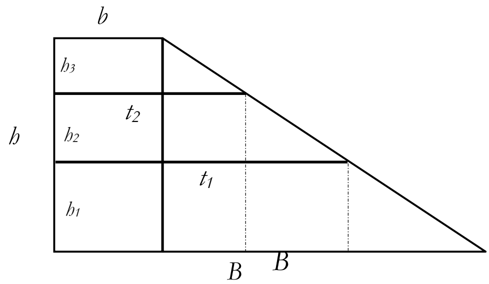

Figura 4

A pesar de ello, transformaremos nuestro trapecio inicial en otro rectangular (figura 4) y trabajaremos con las dos transversales, t_1 y t_2, como si fueran datos y no incógnitas:

Como es sabido, $\frac{h_3}{t_2 - b} = \frac{h_2}{t_1 - t_2} = \frac{h_1}{B - t_1} = \frac{h}{B - b}$, y en este problema concreto, $\frac{h}{B-b} = \frac{1{,}48}{2{,}42} = \frac{2}{3}$.

Luego, las altitudes parciales del trapecio serán:

$$h_3 = \frac{2 \cdot 42}{3} = 28; \quad h_2 = \frac{2 \cdot 54}{3} = 36; \quad h_1 = \frac{2 \cdot 1{,}6}{3} = 44$$

La partición de la altitud se habría realizado según una progresión aritmética, siendo $h_2 = \frac{1}{3}h$:

$$h_3 = \frac{7}{27}h; \quad h_2 = \frac{9}{27}h; \quad h_1 = \frac{11}{27}h$$

Pero, bajo la perspectiva de un matemático de la Antigua Mesopotamia [25]:

$$h_3 = \frac{28}{1,48}h; \quad h_2 = \frac{36}{1,48}h; \quad h_1 = \frac{44}{1,48}h$$

Cuando se trabaja con proporciones es indiferente que estas se apliquen a cada una de las longitudes, al promedio de las mismas, o a la altura real del trapecio: los resultados son siempre correctos.

Las respectivas superficies medirían entonces:

$$S_3 = \frac{51 + 1,33}{2} \cdot 28 = 33,36$$

$$S_2 = \frac{1,33 + 2,27}{2} \cdot 36 = 1,12,0$$

$$S_1 = \frac{2,27 + 3,33}{2} \cdot 44 = 2,12,0$$

Siendo la superficie total aproximada del trapecio:

$$S = \frac{51 + 3,33}{2} \cdot \frac{2,15 + 1,21}{2} = 3,57,36$$

Con estos valores encontramos que $S_1 = \frac{5}{9}S$, mientras las restantes superficies no poseen una proporción tan exacta. Así pues, como únicamente la distribución de las alturas se ordena en progresión aritmética y no ocurre otro tanto con las superficies parciales, pensamos que la división del trapecio rectangular se ha realizado, más bien, en función de la falsa altitud; es decir, se habrían hallado partes proporcionales de esa altitud, a partir de las cuales se calcularían después las respectivas líneas transversales.

Resumiendo: si el escriba quiso calcular la línea que describe una superficie $S_1 = \frac{5}{9}S$, lo pudo hacer aplicando el método YBC 4675, según hemos visto en el diagrama II. Si, por el contrario, la intención del autor de este ejercicio se dirigía a encontrar las transversales en función de una división proporcional del promedio de los lados, utilizando el diagrama III lo habría conseguido fácilmente.

[25] Expresar las respectivas proporciones en función de las altitudes parciales lo vemos hacer en Ash. 1922.168 (Robson 1999, pp. 273-274). Sin embargo, encontramos particiones expresadas mediante las proporciones de la altura en TMS XXVI, TMS XXIII, Str 367 (Neugebauer *MKT* I, p. 259), YBC 4608 (1) (Neugebauer *MCT*, pp. 50-51).

Pero en la tablilla no se menciona nada de esto, por tanto, examinaremos con todo detenimiento las operaciones indicadas en ella a fin de poder dilucidar cómo se efectuó ese reparto; en ello reside la clave del problema.

5. Análisis del texto

Hemos estudiado el trapecio indicado en AO 17264 según los enunciados de la teoría de semejanza de triángulos, hallando de este modo las relaciones existentes entre sus respectivas longitudes. Limitémonos ahora a la lectura de la tablilla.

A. Búsqueda de la primera transversal

Las expresiones:

$$t_1 = \left(B + b + \frac{l}{L} \right) \cdot \frac{1}{(L + l)/2} \cdot 1{,}0 \qquad [\text{III}]$$

$$t_1 = \left(3{,}33 + 51 + \frac{1{,}21}{2{,}15} \right) \cdot \frac{1}{1{,}48} \cdot 1{,}0 \qquad [\text{IV}]$$

sugieren que la partición del trapecio se ha efectuado en función de su altitud, porque no intervienen cuadrados (fórmula [2]). Sin embargo, como en el apartado 2 (diagramas II y III) habíamos distinguido dos maneras distintas de calcular las líneas transversales: 1) tomando partes proporcionales de la altura; 2) limitando una superficie, insisto en la conveniencia de analizar ambas opciones:

1) En relación a una supuesta altitud, altura real o longitud del trapecio:

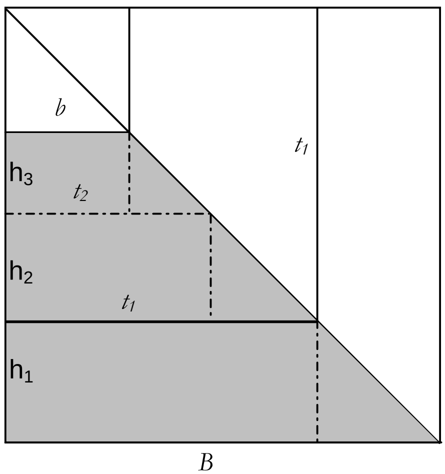

Diagrama IV

Si el escriba hubiera dispuesto aquí de la proporción en la que se iba a efectuar la partición de la altitud (o promedio de los lados), hubiera podido recurrir al diagrama IV para calcular la primera transversal. Veamos cómo:

1.1. Sustituyendo en la fórmula [3]: $t_1 = \frac{n-m}{n} B + \frac{m}{n} b$, las proporciones que hemos hallado por medio de la geometría euclídea, obtenemos:

$$t_1 = \frac{16}{27} B + \frac{11}{27} b \text{ ; o bien, } t_1 = \frac{1{,}4}{1{,}48} B + \frac{44}{1{,}48} b$$

$$t_1 = \frac{1}{1{,}48}(1{,}4 \ B + 44 \ b) = 2{,}27 \qquad [4]$$

1.2. También, sin requerir ninguna fórmula, sino estudiando el diagrama anterior, advertimos que

$$t_1 = \mathrm{h}_2 + \mathrm{h}_3 + b = (h_2 + h_3) \cdot \left(\frac{B-b}{L + l/2} \right) + b$$

Es decir,

$$t_1 = \left(1{,}4 \cdot \frac{2{,}42}{1{,}48} \right) + 51 = 2{,}27$$

2) Si, por el contrario, el escriba sabía que la línea transversal debía describir una superficie igual a $\frac{5}{9}$ S, usaría el diagrama V, en el cual comprobamos que

$$t_1^2 = B^2 - \frac{10}{9} \cdot \frac{B+b}{2} \cdot (B-b)$$

$$t_1^2 = 3{,}33^{\,2} - [(0;6{,}40 \cdot 10) \cdot (4{,}24 \cdot 0;30) \cdot 2{,}42]$$

$$t_1 = 2{,}27$$

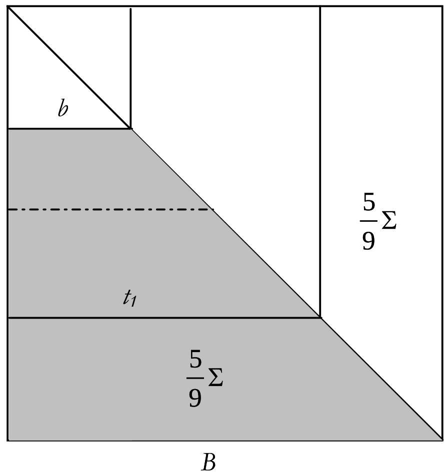

Diagrama V

También, aplicando la ecuación [2] conseguimos la longitud requerida:

$$t_1^2 = \frac{1{,}4}{1{,}48} B^2 + \frac{44}{1{,}48} b^2$$

$$t_1 = 2{,}27$$

Pero ninguna de las igualdades anteriores coincide con la expresión [IV] propuesta por el escriba. Luego volveremos sobre esto. Veamos ahora cómo se ha efectuado la

B) Búsqueda de la segunda transversal

La fórmula [V] nos dice cómo conseguir la segunda transversal, aunque más bien parece ajustarse a los datos concretos de este ejercicio:

$$L - l = t_1 - t_2 = 54; \quad t_2 = 2{,}27 - 54 = 1{,}33$$

La cantidad 54, mencionada por el escriba, es $h_2 = \frac{1}{3}(B - b)$; es decir, $54 = \frac{1}{3} b \cdot \left(\frac{B - b}{(L + l)/2} \right)$, que es además el exceso entre t_1 y t_2, como vemos en el diagrama IV. Luego, en realidad,

$h_2 = t_1 - t_2$ [5]

Comprobamos que las instrucciones de la tablilla aluden implícitamente a realizar una distribución de la altitud, $\frac{L+l}{2}$, en progresión aritmética, en la que al segundo término le corresponde un tercio del total. Esto confirma también que la fórmula [III] se ha conseguido a partir de una división proporcional de esa altitud y no delimitando una superficie $\frac{5}{9}$ de la inicial. Siendo así, ¿tiene algún sentido la expresión [IV] y el argumento que esconde tras ella? ¿Son válidos, en el contexto que analizamos, los argumentos expuestos en el apartado 2 y las fórmulas derivadas de los mismos?
Comparemos ambas ecuaciones: [IV] y [4]:

$$t_1 = \left(3{,}33 + 51 + \frac{1{,}21}{2{,}15}\right)\cdot\frac{1}{1{,}48}\cdot 1{,}0 \qquad \text{[IV]}$$

$$t_1 = (3{,}33\cdot 1{,}4 + 51\cdot 44)\cdot\frac{1}{1{,}48} \qquad \text{[4]}$$

El enunciado del escriba sugiere que el factor 1,0 ha sido introducido por comodidad, para evitar realizar productos engorrosos, con el mismo fin que nosotros manejamos el número 10 o sus potencias: para facilitar las operaciones; mientras el cociente entre los lados indica un ajuste del cálculo, un coeficiente: $\frac{1{,}21}{2{,}15} = 0;36$. Así, operando [26] en nuestra fórmula [4] tenemos,

$$t_1 = [3{,}33\cdot(1{,}0+4) + 51\cdot(1{,}0-16)]\cdot\frac{1}{1{,}48}$$

$$t_1 = [(3{,}33+51)\cdot 1{,}0 + (3{,}33\cdot 4 - 51\cdot 16)]\cdot\frac{1}{1{,}48}$$

$$t_1 = \left[3{,}33 + 51 + \frac{36}{1{,}0}\right]\cdot\frac{1}{1{,}48}\cdot 1{,}0 = 2{,}27 \qquad [6]$$

[26] Aplicamos aquí la propiedad distributiva del producto de números naturales. Acerca del uso de factorizaciones en los cálculos ver Høyrup (2002b)

Demostramos de esta manera que la ecuación [IV] es idéntica a [6] y que pudo enunciarse como consecuencia de la aplicación del método YBC 4675 a este ejercicio. La coincidencia entre ciertas cantidades permite que se incorporen elementos ajenos al cálculo, como son el cociente $\frac{l}{L} = \frac{36}{1{,}0}$ y la diferencia $(L - l) = 54$. Quizá con esta maniobra el escriba quiso subrayar esa misma coincidencia numérica y las propiedades cuantificables del trapecio cuestionado.

Conclusión

El texto AO 17264 posee las siguientes características:

a) No informa explícitamente acerca de cómo ha de realizarse la partición

b) Las fórmulas [III] y [V], propuestas por el escriba, no son transferibles a problemas análogos, aunque concluyen soluciones exactas y coherentes. Pero sí son universales las que nosotros hemos numerado [3] y [5]

c) Se ignora si se conocían de antemano los valores de las dos primeras transversales [27]

d) Las fórmulas [III] y [V], conjuntamente, indican una división proporcional de la altitud del trapecio rectangular

e) Todas las longitudes son enteras y obedecen (¿casualmente?) a una secuencia de triples pitagóricos [28], lo cual indica que se trata de un ejercicio escolar cuidadosamente preparado

f) La aplicación del Método YBC 4675 consigue las soluciones esperadas; aunque esto implica un conocimiento previo de las proporciones escogidas

g) Se aplica la propiedad distributiva del producto; uno de los sumandos es siempre 1,0. Así resulta más sencillo efectuar las multiplicaciones

h) El cálculo de la primera transversal en función del promedio de las longitudes descarta la aplicación de una pre-teoría de semejanza de triángulos

En mi opinión, en este ejercicio se adiestra al alumno acerca de los procedimientos adecuados de efectuar un reparto de tierras[28]. El uso del método YBC 4675 permite hallar partes proporcionales de una superficie cuadrangular, bien en función de una

[27] Thureau-Dangin insinuó que ambas transversales figurarían como datos, en una primera redacción de este problema y que posteriormente, algún copista poco escrupuloso, las incluiría entre las incógnitas (*TMB*, pp. 74-76; *Revue d'Assyriologie* XXXI, pp. 66 y ss.).

[28] Ver la importancia del aprendizaje de las matemáticas en el currículo escolar (Nemet-Nejat 1998; Robson 1999)

supuesta altura de la figura, o promedio de los lados $\left(\frac{L+l}{2}\right)$, bien según se tomen fracciones de esa superficie $\left(\frac{m}{n}S\right)$. La resolución de AO 17264 se asienta en la división proporcional de esa falsa altitud, mediante la cual se han conseguido trazar tres trapecios bisecados consecutivos.

En AO 17264 el escriba introduce operaciones en las que intervienen las medidas de los lados, L y l, simplemente porque sus resultados coinciden numéricamente con las cantidades que se necesitan [29]. Esta conducta ayuda a descubrir las relaciones existentes entre determinadas longitudes del trapecio y ahorra tiempo en el momento de escribir los cálculos. Se actúa así sólo cuando se maneja el método YBC 4675 con destreza y asiduidad. Sin embargo, al lector moderno, esta sutileza le impide comprender el argumento desarrollado.

Este ejercicio es un ejemplo más de lo que Jens Høyrup suele llamar "geometry of cut and paste", propia de la época y lugar que estudiamos.

BIBLIOGRAFÍA

Baqir, T. (1950). "Another Important Mathematical Problem Text from Tell Harmal", *Sumer* 6, 130-148

Brack-Bernsen, L. & Schmidt, O. (1990). "Bisectable Trapezia in Babylonian Mathematics". *Centaurus* 33, pp. 1-38

Bruins, E.M. & Rutten, M. (1961). *TMS: Textes mathématiques de Suse,* Mémoires de la Mission archéologique en Iran, XXXIV, Paris.

Caveing, M. (1985). "La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre et le problème des six frères", *Historia Mathematica* 12, 6-24

——— (1993). *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte Anciennes,* Lille: Presses Universitaires de Lille

Damerow, P. (2001). "Kannten die Babylonier den Satz des Pythagoras?, en Høyrup y Damerow (eds.), *Changing views on Ancient Near Eastern Mathematics,* pp. 219-310; Berlín: Dietrich Reimer Verlag

Friberg, J. (1981). "Methods and Traditions of Babylonian Mathematics", *Historia Mathematica* 8, 277-318

——— (1990). "Mathematik", *Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie* VII, 531-585. Berlin & New York: Walter de Gruyter

Gandz, S. (1948). "Studies in Babylonian Mathematics I", *Osiris* 8, 13-40

Goetsch, H. (1968-69). "Die Algebra der Babylonier", *Archive for the History of Exact Sciences* 5, 79-160

Høyrup, J. (1985). *Babylonian Algebra from the view-point of geometrical heuristics. An investigation of terminology, methods, and patterns of thought*, Roskilde: Roskilde University Centre, Institute of Educational Research, Media Studies and Theory of Science

——— (1990). "Algebra and Naïve Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought", *Altorientalische Forschungen* 17, 262-354

(2001). "On a Collection of Geometrical Riddles and their Role in the Shaping of Four to Six ´Algebras´ ", *Science in Context* 14 (1-2), 85-131

——— (2002a). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer.

——— (2002b). "A Note on Old Babylonian Computational Techniques", *Historia Mathematica* 29, 193-198.

[29] Esta práctica no es aislada, la encontramos también en IM 52301 (1) (Baqir 1950) y en TMS XXIII (Bruins y Rutten *TMS,* pp. 114-117; Yuste 2004)

Høyrup, J. (2003). "Note added to Kazuo Muroi, 'Inheritance Problems in the Susa Mathematical Text No. 26' ", *Historia Scientiarum*, Second Series (próximo)

Muroi, K (2001). "Inheritance Problems in the Susa Mathematical Text nº 26", *Historia Scientiarum,* Second Series 10, 226-234

Nemet-Nejat, K. R. (1993). *Cuneiform Mathematical Texts as a Reflection of everyday Life in Mesopotamia.* New Haven: CT. American Oriental Society

——— (1998). *Daily Life in Ancient Mesopotamia,* Greenwood Press

Nissen, H.J.; Damerow, P.; Englund, R.K. (1993). *Archaic Bookkeping*, Chicago & London: University of Chicago Press

Nissen, H. J. (1988). The Early History of the Ancient Near East 9000-2000 B.C., The University of Chicago Press

Neugebauer, O. (1935-37). *MKT: Mathematische Keilschrift-Texte*, *Quellen und Studien Geschichte der Mathematik*,, 3 vols., Berlin.

——— (1969). *The Exact Sciences in Antiquity*, New York: Dover, (2ª ed.)

——— (1986). *MCT: Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society, Connecticut: New Haven

Robson, Eleanor (1999). *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC: Technical Constants in Bureaucracy and Education,* Oxford: Clarendon Press

——— (2001). "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322", *Historia Mathematica* 28, 167-206

——— (2002). "Words and Pictures: New Light on Plimpton 322", *American Mathematical Monthly* 109, nº 2, 1- 14

Sánchez Pérez, J.A. (1943). *La aritmética en Egipto y Babilonia*, Madrid: CSIC

Sarton, G. (1980): *Ancient Science through the Golden Age of Greece,* New York: Dover Publications

Thureau-Dangin, F. (1938). *TMB: Textes mathématiques babyloniens,* Leyden.

——— (1934). "Notes assyriologiques", *Revue d'Assyriologie* XXXI

Van der Waerden, B. (1961). *Science Awakening*, A. Dresden (trad.), Groningen (Holland): P. Noordhoff Ltd.

——— (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations,* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag

Yuste, P. (2003). *Modelos geométricos de la matemática babilónica: Pruebas y refutaciones.* Tesis Doctoral, Dpto. Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia. UNED

Yuste, P. (2004) "Trapezoidal Partition in Old Babylonian Geometry: A Note about TMS XXIII", *Historia Scientiarum* 14-1

Waismann, F. (1951). "Verifiability", en A. Flew (ed.), *Logic and Language*, 1st series. Oxford: Basil Blackwell, pp. 17-44.

Piedad Yuste es becaria postdoctoral en la Facultad de Filosofía de la UNED. Su tesis doctoral (septiembre de 2003) analiza las matemáticas elaboradas en la Antigua Babilonia. Actualmente investiga el origen de la regla de Pitágoras en este contexto. Ha publicado en revistas como: *Éndoxa*, *Revista Española de Física* e *Historia Scientiarum*. Comparte la docencia de una asignatura para la que ha preparado la Guía Didáctica.

Dirección: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Dpto. de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia, Facultad de Filosofía, Paseo Senda del Rey nº 7, Madrid 28040. E-mail: pyuste@bec.uned.es