La introducción de los números transfinitos.

Por José Ferreirós.

Los números transfinitos van a celebrar su 123 aniversario. El día 5 de noviembre de 1882, Georg Cantor escribía a su colega Richard Dedekind:

> Precisamente desde nuestros últimos encuentros en Harzburg y Eisenach [septiembre de 1882], Dios Todopoderoso me ha concedido alcanzar las aclaraciones más notables e inesperadas en la teoría de conjuntos y la teoría de números, o, más bien, que encontrara aquello que ha fermentado en mí durante años y que he estado buscando tanto tiempo.

La carta de la que se extrae esta cita es, junto a otras dirigidas a Mittag-Leffler, nuestro más antiguo testimonio del genial nacimiento. O quizá, siguiendo a Cantor, deberíamos decir que se trataba del "descubrimiento" de los números ordinales transfinitos, que aquél, como escriba y fiel intérprete de Dios o la Naturaleza, no hacía sino recibir y copiar de la voz revelada.

El resultado fue una de las más grandes invenciones de la imaginación matemática, comparable en este sentido a 'objetos' o ideas del calado de los números reales y los complejos. Cantor pertenece al reducido grupo de matemáticos que han establecido ideas y demostraciones tan originales e impactantes por su resultado, como simples por el método. David Hilbert daba cuenta de ello con una anécdota notable que ofreció a la hija del matemático, recién fallecido éste:

> Precisamente hace unos días tuve ocasión de experimentar la intensidad con la que obran las teorías de su padre sobre una naturaleza congenial. Al visitar a Einstein en Berlín le expuse el clásico procedimiento con el que su padre ha demostrado la imposibilidad de "enumerar" los números irracionales, etc. Y Einstein, que todo lo capta enseguida, estaba totalmente subyugado por lo magníficos que son esos pensamientos.

Este resultado de 1874, pero sobre todo la gran invención cantoriana de los números transfinitos, abrieron el camino al célebre paraíso que predicó Hilbert:

> Queremos investigar cuidadosamente, siempre que exista la menor perspectiva de éxito, las construcciones conceptuales y formas de inferencia fructíferas, para cultivarlas, afianzarlas y hacerlas susceptibles de aplicación. Del paraíso que Cantor nos creó, nadie podrá expulsarnos. (Hilbert 1926, 376–377)

El nacimiento de los números transfinitos llegó, como veremos, unido a un auténtico terremoto en la trayectoria y el pensamiento de Cantor. Atreverse a enumerar y contar lo infinito representaba un paso muy arriesgado, con claras implicaciones filosóficas, contraviniendo múltiples advertencias previas. Algunos se habían anticipado con la admonición de que "someter" lo infinito a tratamiento numérico constituiría un claro caso de anatema. El matemático ruso-alemán fue consciente de todo ello, y decidió afrontar los riesgos con arrojo, tomando –por decirlo al modo ibérico– el toro por los cuernos.

Así surgió un texto único en la historia de las matemáticas, una mezcla inigualable de saber matemático y erudición histórico-filosófica, de riquísimas ideas nuevas y declaraciones de principios, de filosofía matemática y matemática filosófica. Para marcar la importancia del escrito, Cantor no se contentó con publicarlo en forma de quinta entrega de una serie de artículos en los *Mathematische Annalen*, sino que lo hizo editar separadamente en Leipzig bajo los auspicios del célebre editor Teubner.

En este volumen, el mencionado texto de Cantor forma el centro, pero viene acompañado por algunos otros artículos y cartas que ayudarán al lector a formarse una imagen global de Cantor y su genial contribución. Las páginas que siguen no tienen otra intención que acompañar a sus hermosos textos, facilitar en lo posible su lectura, y justificar algunos rasgos de la traducción que ofrecemos, primera que se publica en esta lengua.

1. El contexto de los *Fundamentos*, o la génesis del "paraíso".

Aunque la placa colocada en 1970 en la casa de Halle donde habitó Georg Cantor le califique de "fundador de la teoría de conjuntos", lo cierto es que no era el único –ni el primer– autor que investigaba cuestiones relacionadas con los conjuntos en las décadas de 1870 y 1880. En conexión con el análisis y los conjuntos de puntos trabajaban P. du Bois-Reymond, U. Dini, J. Harnack y otros; en álgebra, teoría de números algebraicos y fundamentos estaban también las contribuciones de R. Dedekind, sólo o con H. Weber; y pronto vendrían las de G. Peano. Si las contribuciones de Hankel, du Bois-Reymond, Cantor y otros impulsaron la introducción de conceptos conjuntistas en el análisis, Dedekind desempeñó un papel muy especial en la configuración y fundamentación de un *estilo conjuntista* dentro de la matemática moderna, no sólo en análisis sino también en el álgebra y la teoría de números. Pero, aunque hubiera una cierta sensación de convergencia e incluso de competencia, algunos rasgos diferenciaban netamente las preocupaciones de Cantor respecto a los demás autores.

Todos esos matemáticos estaban directamente motivados por problemas del análisis, del álgebra, o de alguna rama en desarrollo de la matemática pura, pero Cantor encaminaba sus pasos hacia cuestiones más especulativas. Buscaba aclaraciones acerca del infinito en acto, de su filosofía y sus matemáticas, de cómo está constituido el universo de los conjuntos infinitos; aclaraciones acerca de lo que es el continuo –no una función continua, sino un continuo de números o de puntos– porque pensaba que sin ellas resulta imposible entender la realidad física; y buscaba particularmente aclaraciones acerca del cruce entre ambos campos de problemas: la Hipótesis del Continuo. Ningún otro matemático le acompañó, por entonces, en la investigación de cuestiones tan abstractas como esa última o como la teoría de los números transfinitos.

Todo había comenzado diez años antes de la publicación de los *Fundamentos*. Es verdad que Cantor había introducido ya algún concepto conjuntista en un artículo sobre cuestiones del análisis (series trigonométricas) publicado en 1872. Pero el acta de nacimiento de la teoría de conjuntos transfinitos lleva fecha del 7 de diciembre de 1873, cuando logró demostrar en una carta a Dedekind que el conjunto **R** de los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto **N** de los naturales: **R** es un conjunto *no-enumerable*, en expresión que él mismo acuñó unos años más tarde. Este resultado llevó a su autor a la conclusión de que cabe establecer distinciones entre los infinitos: lejos de lo que pensara la tradición, hay diversos 'tamaños' u 'órdenes' del infinito, diversas *cardinalidades* como decimos hoy.

Al publicar ese llamativo teorema en 1874, por respeto a las advertencias de su maestro Weierstrass y quizá de Kronecker, Cantor apenas se atrevió a incluir una breve indicación de la posibilidad de establecer tales distinciones. El concepto general de *potencia* o *cardinalidad* de un conjunto sólo quedó definido en 1878, en un artículo que demostraba la existencia de correspondencias biunívocas entre **R** y cualquier espacio euclideo $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (véase la correspondencia con Dedekind de 1877). Dos conjuntos A y B tienen *la misma cardinalidad*, ambos son *equipotentes*, si y solo si existe una aplicación *f* de A en B que es biyectiva (esto es, una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de A y los de B). Por ejemplo, el conjunto de los números enteros es equipotente a **N**: basta pensar en los enteros reordenados del siguiente modo: 0, 1, –1, 2, –2, … (esto da idea de cómo definir la aplicación biyectiva f que se necesita); y ya antes de 1870 había demostrado Cantor que, sorprendentemente, el conjunto **Q** de las fracciones o números racionales también es equipotente a **N**.

Ese resultado fue expuesto por Cantor, al parecer, en el seminario de Weierstrass en Berlín hacia 1868. En una carta escrita años después Cantor explica que, a fin de comprobar que los números racionales positivos son enumerables, basta ponerlos en el orden siguiente:

Esto es, se toman las fracciones m/n, m'/n' en su forma irreducible, y se ordenan de manera que la primera vaya antes o después de la segunda según que $m + n$ sea menor o mayor que $m' + n'$; en cuanto a las fracciones para las que $m + n = m' + n'$, se ordenan de menor a mayor numerador.

Estudiando conjuntos de puntos en la recta (o lo que viene a ser lo mismo, subconjuntos de **R**) y en el espacio, todos los ejemplos que Cantor había podido considerar durante los años 1870 le enfrentaban, o bien con conjuntos *enumerables* –equipotentes a **N**–, o bien con conjuntos equipotentes a **R**. El conjunto de los números racionales, el de los números algebraicos, y muchos de los conjuntos de unicidad que Cantor había considerado hacia 1872 (en sus célebres investigaciones acerca de series trigonométricas) son enumerables. En el artículo de 1878 conseguía demostrar que el conjunto de los números irracionales es equipotente a **R**, y también –por increíble que parezca– el conjunto de los puntos del espacio $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ es equipotente a **R**. Un segmento cualquiera, un cuadrado, un cubo, y un cubo de n dimensiones ¡tienen todos ellos exactamente el mismo número de puntos! (Se trata, obviamente, de un "número transfinito".)

Cantor se atrevió pues a conjeturar la justamente famosa *Hipótesis del Continuo*:

> A través de un proceso inductivo, en cuya exposición no entraremos aquí, se hace plausible la proposición de que la cantidad de clases de conjuntos lineales que surgen aplicando este principio de clasificación es finita, y precisamente igual a dos.

El principio de clasificación mencionado no es otro que formar clases de equipotencia: poner los subconjuntos de **R** que son equipotentes entre sí en una misma clase. Acabamos de leer la Hipótesis del Continuo –en adelante, HC– en su versión más débil, restringida al caso de los números reales: todo subconjunto de **R** será, o bien enumerable, o bien de la potencia del continuo.

Esta cuestión tan especulativa, decidir la verdad o falsedad de la HC, se convirtió a partir de entonces en el centro de los afanes de Cantor, el norte de su atrevida incursión en el laberíntico universo de los conjuntos transfinitos. Dado que bastaba investigar las potencias que pueden encontrarse entre los “conjuntos lineales”, pues al considerar subconjuntos de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ no encontraremos representantes de nuevas potencias, Cantor comenzó a publicar en los *Mathematische Annalen* (bajo los auspicios del conocido matemático Felix Klein, actuando como editor) una serie de artículos titulados ‘Sobre variedades de puntos lineales e infinitas’ –donde una “variedad” no es otra cosa que un conjunto–. El quinto y más importante número de esta serie fueron justamente los *Grundlagen*.

El año 1882 resultó especialmente notable en la producción científica de Cantor: fue su *annum mirabilis*, a los 37 de edad. Las dos primeras entregas de ‘Sobre variedades de puntos’ no ofrecían grandes novedades, pero en 1882 Cantor redactó tres nuevas entregas en las que se encontraban resultados muy novedosos, entremezclados con reflexiones acerca de la teoría de conjuntos, su papel en la matemática, y sus implicaciones. La serie se cerraría en 1884, con un artículo donde se demostraba el teorema de Cantor–Bendixson y la equipotencia entre los conjuntos perfectos y el continuo. Con estos resultados, la HC quedaba demostrada para una amplia clase de conjuntos de puntos: los llamados conjuntos *cerrados*, que contienen todos sus puntos de acumulación.

Un rasgo que determina el carácter de los *Fundamentos* es la urgencia con la que Cantor redactó la obra. Las fechas, por cierto, pueden resultar muy confusas al lector no avisado: a la vista de las dos versiones del trabajo se pensaría que todo el texto (con las notas) estaba listo ya en octubre, y que en Navidades el autor añadió un prefacio para la edición separada que publicaría Teubner en Leipzig a comienzos de 1883. Pero sabemos por las cartas que Cantor enviaba a Klein y Mittag-Leffler que la realidad no fue esa: la fecha que lleva el artículo impreso, octubre, es simplemente la del momento en que “Dios Todopoderoso” tuvo a bien que Cantor encontrara “aquello que ha fermentado en mí durante años y que he estado buscando tanto tiempo”.

Inmediatamente, y de manera febril, se puso a perseguir las implicaciones de la nueva idea, que consistía en concebir los transfinitos como “verdaderos números”, tan reales como los enteros, y agrupados además en "clases numéricas". Una larga y dedicada ocupación con la teoría de conjuntos había puesto en sus manos copiosos materiales matemáticos y filosófico-científicos que ahora podían ser corregidos, aumentados y puestos en perspectiva. De octubre hasta finales de diciembre, Cantor fue redactando el cuerpo principal del trabajo; las notas parecen haber sido añadidas a lo largo de enero de 1883. El 7 de febrero enviaba a Felix Klein los últimos retoques y le pedía que aceptara la obra entera en su revista, a pesar de la fuerte presencia de contenidos filosóficos.

Sabiendo que el volumen de los *Mathematische Annalen* tardaría unos pocos meses en aparecer, la urgencia que Cantor sentía le impulsó a emprender una publicación separada como librito, arrostrando los costes correspondientes. Estas prisas en la elaboración y publicación se traslucen en algunas imperfecciones del escrito, tanto en lo relativo a la elección de terminología, como en la presentación de algunos conceptos. Un buen ejemplo es la prolija definición de los conjuntos bien ordenados (§ 2 de la obra).

El motivo de publicar separadamente los *Fundamentos* resulta claro, y lo indica el propio Cantor: la importancia del escrito, su carácter verdaderamente fundamental, pues representa nada menos que el momento de madurez y autonomía de la teoría de conjuntos transfinitos. Por eso, la nueva entrega a los *Annalen* era mucho más que la quinta parte de una serie de artículos. Pero esto no basta para explicar la urgencia sentida por su autor. Las sensaciones de urgencia o de serenidad tienen mucho que ver, qué duda cabe, con la personalidad de cada cual. De manera que el tema nos lleva al dominio de lo privado: a la vida de Cantor.

2. Un esbozo biográfico.

Cantor no era un autor pausado y clásico, al estilo de Gauss o Dedekind; lejos de él quedaba el lema gaussiano "Pauca sed matura" [pocas obras, pero maduras]. Si, como dijo el noruego Abel, Gauss era un zorro que esconde cuidadosamente sus huellas, ya que la versión escrita de sus resultados no daba ninguna pista sobre el proceso heurístico seguido, las huellas del proceso creativo de Cantor están a nuestra disposición y bien visibles en sus artículos. Era un hombre muy temperamental, con un carácter más cercano al del artista, romántico e impulsivo. Por muchas razones nos recuerda a aquellos románticos de la *Naturphilosophie* [filosofía de la naturaleza] idealista.

Georg fue hijo de un corredor de comercio adinerado de origen danés, y una madre ruso-alemana aficionada al arte y la música. Nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, pero once años después el padre se retiró de sus pingües negocios en la casa "Cantor & Co." por mala salud, y la familia se trasladó a Frankfurt. Tras asistir Cantor a una escuela de formación profesional, su vocación matemática triunfó y el padre otorgó el necesario permiso. Georg le escribió en esta ocasión:

> ¡Mi querido papá! Ya puedes imaginarte cuánto me ha alegrado tu carta; ella determina mi futuro. … Espero que aún tendrás ocasión de vivir alegrías a mi costa, querido padre, ya que mi alma y todo mi yo viven en mi vocación; lo que el hombre quiere y puede, aquello a lo que le conduce una voz desconocida y misteriosa, ¡*eso* lo llevará adelante!

Una cuestión que se ha discutido a menudo acerca del matemático es si era de origen judío, y el hecho de que empleara la primera letra hebrea, alef (), para los cardinales transfinitos ciertamente ha estimulado el debate. En la época nazi se investigó el asunto, pero un funcionario de Copenhague aseguró que en las actas disponibles no constaban antepasados judíos de los Cantor. Desde luego, aplicando ideas rabínicas estrictas, Cantor no era judío, ya que su madre era católica y el padre había sido bautizado luterano. Pero las leyes raciales nazis eran más estrictas: ¡bastaba con tener un abuelo judío de nacimiento!

Meschkowski (1983, 235), de acuerdo con un descendiente del propio Cantor, opina que "obviamente" el certificado expedido en Copenhague no es concluyente, aduce que algunos funcionarios bienintencionados protegían a los encausados, y añade que la hija mayor de Cantor, Else, reconocida maestra de canto, fue excluida del *Reichmusikkammer* por orígenes no arios. El hecho de que la familia de la mujer de Cantor, los Guttmann, estuviera explícitamente ligada a la causa de la integración de los judíos también es relevante. Pero, sobre todo, Cantor no escondió sus orígenes a amigos y colegas. El documento principal es una carta al matemático francés e historiador Paul Tannery, que además de zanjar la cuestión incluye otra información de interés:

> Mi difunto padre, muerto en Alemania el año 1863, *Georg Woldemar Cantor*, vino de niño a *San Petersburgo* con su madre y fue *bautizado* allí como *luterano*. Pero había nacido en *Copenhague* (no sé con seguridad en qué año, entre 1810 y 1815) de *padres israelitas*, pertenecientes a la *comunidad judía portuguesa* allí establecida, y que por tanto eran con suma probabilidad de origen hispano-portugués.
>
> Mi madre, Marie Cantor, nacida Böhm, que vive ahora y desde 1863 en Berlín, es petersburguesa de nacimiento, pertenece a una familia católica romana procedente de *Austria*.
>
> Mi abuelo por parte materna Franz Böhm fue maestro concertista del emperador de Rusia y *virtuoso del violín* en San Petersburgo; también su mujer, mi abuela Maria Böhm, nacida

> *Morawek*, era *virtuosa violinista*.
> Un hermano de mi abuelo fue el maestro de conciertos *vienés Joseph Böhm*, fundador de una famosa escuela de violinistas, de la que han surgido muchos grandes virtuosos como *Joachim*, *Ernest*, etc.

Cantor estuvo siempre muy orgulloso de estas conexiones artísticas en su familia, así como del carácter verdaderamente cosmopolita y multi-religioso de sus orígenes. Algunos comportamientos y aficiones suyos, que enseguida veremos, adquieren contornos nuevos al ser juzgados a esta luz. Además, Cantor consideraba que él mismo estaba dotado de un verdadero temperamento artístico.

Los estudios universitarios, comenzados en Zurich, se desarrollaron principalmente en Berlín. Por esa época, la ciudad prusiana no sólo se convertiría en capital del *Reich*, sino también se convertía en la meca de la matemática europea, bajo la dirección de Kummer y Weierstrass. Georg fue uno de los primeros –y uno de los más grandes– discípulos de esta escuela enormemente influyente. La escuela de Berlín representaba la orientación enormemente purista, y muy rigurosa, de la matemática alemana en la época. Destacó sobre todo en el campo del análisis, y fue célebre especialmente por las lecciones de Weierstrass, verdadero maestro de la escuela.

Aunque Cantor dedicó sus trabajos de doctorado y habilitación a la teoría de números, sus primeros grandes trabajos vinieron precisamente en el mundo del análisis. En 1870 demostró, en colaboración con Heine, que una serie trigonométrica convergente representa una *única* función de variable real. En 1872 publicó un importante artículo en el que extendía ese resultado a series trigonométricas que no convergen en ciertos "conjuntos de unicidad" infinitos. Tales conjuntos quedaban caracterizados con precisión mediante el concepto de *conjunto derivado*, y todo el asunto daba pie a que Cantor presentara su célebre definición de los números reales (que simplifica la definición dada por Weierstrass en sus lecciones).

Para entonces, y ya desde 1869, Cantor era profesor en la Universidad de Halle, que había tenido un pasado importante, pero cuyo presente era de segundo nivel. Cantor aspiró enseguida a ocupar un puesto de mayor nivel, en Göttingen o en Berlín, pero sus intentos en esa dirección fracasaron y tuvo que contentarse con permanecer de por vida en aquel destino "provisional" (como profesor 'ordinario' desde 1879). Fue uno de los tantos desengaños que sufrió, y que aprendió a ver como decisiones de la divinidad. Y es que su destino –llegó a pensar– no era convertirse en un científico poderoso, sino algo de mucho mayor calado: desvelar la verdadera naturaleza del infinito, y abrir con ello nuevos campos a la matemática, la ciencia, la filosofía y la teología. Nada menos.

Un detalle poco llamativo de su trabajo de 1872 merece mayor discusión: Cantor lo publicó en los *Mathematische Annalen*, y no en el célebre *Journal de Crelle* editado por los berlineses. El detalle parecerá sin importancia a quien no conozca la época, pero es sumamente revelador del temperamento rebelde de nuestro hombre. Las escuelas matemáticas alemanas operaban como grupos de influencia bastante cerrados, y los *Annalen* eran precisamente el órgano de expresión de la escuela de Clebsch, enfrentada con la de Berlín.

El espíritu de libertad intelectual que Cantor ponía de manifiesto aquí se expresaba también en sus trabajos. En el campo del análisis, todo el final del siglo **19** alemán estuvo atravesado por la división entre los seguidores de Weierstrass, partidarios del rigor a toda costa, y los partidarios de Riemann, motivados por la búsqueda de conceptos matemáticos nuevos y muy pregnantes (aunque ello les llevara a caminar por sendas nuevas, donde las vías del rigor no estaban claras). Es característico de la contribución de Cantor a las series trigonométricas que combinaba métodos de Riemann y de Weierstrass, desarrollándolos de manera precisa y moderna. Esta tendencia continuó en los años siguientes, y Cantor se alejó cada vez más de la ortodoxia weierstrassiana, siguiendo la vía que condujo a la matemática más moderna.

Precisamente en 1872 Cantor conoció por casualidad, durante las vacaciones de verano, a Richard Dedekind (1831–1916), discípulo aventajado de Riemann y proponente radical de concepciones muy modernas, proto-estructuralistas, pero a la vez rigurosas. En aquel entonces las ideas conjuntistas de Dedekind estaban muy avanzadas, y las dos mentes encontraron amplias zonas de contacto, entrando rápidamente en sinergia. Lástima que muy poco más tarde, en 1874, surgieran dificultades de relación que impidieron una colaboración estrecha entre los dos padres de la matemática conjuntista. De todos modos, la correspondencia entre Cantor y Dedekind, que el lector o lectora encontrará traducida, ha quedado como testimonio célebre del nacimiento de la teoría de conjuntos entre 1872 y 1882.

En 1874, Georg se casó con Vally Guttmann, una mujer cuyas inclinaciones artísticas casaban bien con las del propio Cantor. La había conocido a través de su hermana Sophie, y era especialmente aficionada a la música: había aprendido canto y piano, al parecer con gran rendimiento. La afición de Vally por la música y el arte, su espíritu alegre, fueron un complemento importante al aire serio de Georg y determinaron el ambiente en la casa, donde –como era entonces natural para un Herr Professor alemán– se llevaba una activa vida social. Con ella tuvo seis hijos, cuatro niñas y dos niños. Es importante mencionar que Vally perdió pronto a sus padres y se crió en casa de su hermano mayor, el Dr. Paul Guttmann, que fue director del Hospital Municipal de Moabit en Berlín. En este Hospital trabajaban muchos médicos y enfermeras judíos, que naturalmente fueron víctimas del nazismo desde 1933. Los Guttmann no eran judíos, pero obviamente eran favorables a la integración plena de los judíos; Paul realizó algunos trabajos sobre malaria y tuberculosis con el célebre médico judío Paul Ehrlich.

Fue en aquel mismo año de 1874 cuando se publicó, en el *Journal* de Berlín (también llamado "de Crelle" por el nombre de su fundador Leopold Crelle), la demostración de que el conjunto de los números reales *no es* enumerable, mientras que el conjunto de los números algebraicos sí lo es. Cantor concluía de sus argumentos en dichas demostraciones que todo intervalo de $\mathbf{R}$ contiene números transcendentes, dando así una nueva demostración del teorema de Liouville. A esto siguió en 1878, mediando de nuevo una fructífera discusión con Dedekind, el artículo que demostraba la equipotencia entre $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, que acababa con la conjetura de la hipótesis del continuo HC (ver más arriba).

A partir de aquí, Cantor decidió emplear los conceptos conjuntistas de que disponía (cardinalidad, conjunto derivado, y alguna noción topológica) de manera combinada para atacar la HC y demostrarla. Esto le permitiría estudiar la topología de los conjuntos de puntos y sus cardinalidades, y así se vio conducido a los grandes resultados de los años 1880. En particular, se vio llevado al teorema de Cantor-Bendixson, y el esfuerzo por demostrarlo le condujo de la mano hacia los números ordinales transfinitos.

Hay motivos para pensar que, por estos años, Cantor se sentía inmerso en una competencia con otros matemáticos (Dedekind, du Bois-Reymond) por la elaboración y publicación de la teoría de conjuntos. Esto explica también buena parte de la urgencia que sentía por publicar. Pero, además, hay otra hipótesis respecto a los motivos de su prisa que resulta inevitable. En la primavera de 1884, una negra noche se cernió sobre él: fue la primera crisis maníaco-depresiva que sufrió, manifestación de una enfermedad que le acompañaría el resto de sus días, especialmente en los años finales, a partir de 1900. Pero ya en 1884 cambió su modo de comportarse, su relación con los colegas de profesión, e incluso su caligrafía. Este tipo de problemas tienen causas endógenas, y suelen tener manifestaciones suaves mucho antes de las crisis severas. La urgencia y el nerviosismo que experimentaba Cantor ante la publicación de sus escritos –ya desde 1878– pueden ser una manifestación inicial de ese temperamento 'nervioso' que acabó resultando enfermizo.

Como irá intuyendo el lector, la personalidad de Cantor era llamativa: un hombre de gran intensidad, rápido, muy inteligente, de comentarios explosivos, a quien el rigor matemático no coartó un ápice su libertad de pensamiento, sus ansias especulativas. Un colega suyo en Halle, el matemático Heine, comentó ya hacia 1870 que "este Cantor" llegaría a hacer algo grande, porque en él se combinaban "una agudeza inusual y una fantasía realmente extraordinaria". Todo ello venía acompañado por su gran figura, su voz profunda, su manera de hablar imponente (véase la anécdota al final de la sección 6), su gran energía y su afición a discutir asuntos matemático-científicos de noche o de día. Schoenflies, que le conoció bien en persona, escribe:

> Quien haya experimentado sólo una vez el atractivo de la personalidad de Cantor, sabe que estaba llena de agudeza y de temperamento, de ingenio y originalidad; era fácilmente tendente a la explosión, y se alegraba francamente de las propias ocurrencias.

En otro lugar expone una de esas "explosiones": la anécdota de cómo Cantor, llevado por la intensidad de su entusiasmo por la teoría de conjuntos, llegó tan de mañana al hotel donde se hospedaban Hilbert y Schoenflies, que tuve que esperarles muchísimo tiempo en la sala de desayunos, para al fin hablarles sobreexcitado, "como él era" (al menos en sus años tardíos), y presentarles "una nueva refutación" de un supuesto resultado que contradecía una de sus creencias más firmes.

Ya en sus años de estudiante sentía pasión por la metafísica, sobre todo la del filósofo racionalista judío Spinoza. Esto es muy indicativo, y no sólo por la cuestión religiosa y los orígenes peninsulares del gran filósofo: según Spinoza la realidad entera está transida de infinito; todo fenómeno real (incluyéndome a mí y a usted misma, lectora) es una manifestación particular de la única sustancia real, *Deus sive Natura*, Dios o la Naturaleza. Estas ideas salen a la luz en los *Fundamentos* de 1883.

También fue hacia 1870 cuando Cantor sintió interés por la tradición teológica católica, con motivo del Concilio Vaticano, a pesar de haber sido criado como protestante. Más tarde se escribiría con teólogos y con cardenales, en una muestra más de aquella rebeldía frente a las escuelas establecidas que demostró con sus publicaciones (ver arriba) y que compartía con Spinoza. Incluso llegaría a redactar una carta para convencer al mismísimo Papa de la bondad y la necesidad de sus teorías sobre el infinito. Pero esto no le impidió publicar interpretaciones poco ortodoxas acerca de José de Arimatea como verdadero padre de Jesús (negando así el dogma de la inmaculada concepción, defendido entonces tanto por católicos como por evangélicos). Quizá detrás de este interés por los pensadores católicos y judíos había también un componente importante de curiosidad por los propios orígenes (recordemos que su madre nació católica y su padre, de creer a Cantor, judío).

Los años intermedios de la década de 1880 fueron tan ricos en ideas y resultados como en experiencias difíciles. Los matemáticos de Berlín se habían ido haciendo más y más influyentes, pero el audaz Cantor se había enemistado con antiguos amigos íntimos, sobre todo H. A. Schwarz. Leopold Kronecker era cada vez más influyente en los círculos de poder de la capital del Segundo Reich. Sus opiniones determinaban las ideas de numerosos matemáticos alemanes, además de armonizar con las opiniones de algunos de los franceses más influyentes, y cada vez hablaba más abiertamente en contra de las ideas de Cantor, al que llegó a llamar corruptor de la juventud. Conviene advertir que años atrás, en los 1870, ambos habían tenido buena relación y colaboración; Cantor probablemente había puesto muchas esperanzas en el apoyo de los influyentes berlineses. El enfrentamiento posterior no fue un simple asunto de voluntad de poder, sino que Kronecker se había convertido en partidario radical del constructivismo en matemáticas, mientras Cantor se había ido desviando más y más de aquella posición: comenzaba la disputa sobre los fundamentos de la matemática.

A la vista de todo ello, Cantor se convenció de que nunca saldría de Halle, y empleó su herencia en construir –al fin, tras 15 años– una hermosa casa propia. (Allí pasaba largas horas trabajando en la surtida biblioteca, donde a primerísima hora de la mañana –dormía apenas 6 horas– se dedicaba a la lectura de filósofos, teólogos y literatos.) Pero su inmensa energía exigía hacer algo, y la primera iniciativa fue convertir a Halle en un nuevo centro matemático que rivalizara con Berlín. La ocasión llegó en 1881, cuando la muerte de su buen colega Heine dejó una plaza vacante. Cantor hizo todo lo posible por convencer a Dedekind de que aceptara esa plaza; juntos, debió pensar, podían irradiar las ideas modernas y la teoría de conjuntos a toda Alemania, al mundo. Pero Dedekind rechazó la oferta, quizá movido en parte por temor al temperamento inestable de su colega, pero también por arraigo a su ciudad natal y su familia, con la que vivía su contemplativa vida de soltero en una situación muy cómoda. Una nueva frustración, a la que Cantor respondió desarrollando el sentimiento de que la comunidad matemática alemana le había cerrado sus puertas.

Afortunadamente, el matemático sueco Mittag-Leffler estaba poniendo en marcha la nueva revista *Acta mathematica* y contó con Cantor para los primeros números. La relación entre ambos comenzó con intensidad y Mittag-Leffler desplazó a Dedekind como corresponsal privilegiado, pero la situación no duraría.

La acumulación de sinsabores y el enfrentamiento con Berlín, que Cantor vivía en primera persona y desde una posición débil, acabarían haciendo mella en él. Kronecker era un hombre de opiniones fuertes y no perdía la ocasión de expresarlas. Por estos años, ello le condujo a un desagradable enfrentamiento con su viejo amigo Weierstrass y al debate polémico con Dedekind, su principal rival en el campo de la teoría de números y la geometría algebraica. Las ideas especulativas de Cantor se convirtieron en uno de sus principales objetos de crítica y mofa, especialmente en conversaciones privadas. Una persona más equilibrada que Cantor habría juzgado la situación de otra manera y habría sabido dar tiempo al tiempo. Pero nuestro hombre estaba hecho de otra pasta.

Como el lector o lectora verá, los *Fundamentos* incluyen más de una pulla dirigida contra la visión de Kronecker: por primera vez salía a luz, aunque velado, un debate que hasta ahora se había mantenido en privado. El mandarín de Berlín se fue convirtiendo en su "bestia negra", y en 1884 Cantor tomó la decisión arriesgada de incomodarlo postulándose ante el Ministerio para una cátedra en la capital. Entretanto, Kronecker solicitaba a Mittag-Leffler que *Acta mathematica* dejara de ser órgano de expresión para las ideas enfermizas del nuevo análisis, y le prometía un artículo crítico en el que mostraría la inanidad de esos conceptos.

Cantor acabó cediendo a la tensión, a la que también debió contribuir su intensísimo ritmo de trabajo: de mayo a junio de 1884 desarrolló su primera crisis grave, con un período de fuerte depresión. Cuando la crisis cedió, aconsejado por su mujer y su médico, realizó un intento de reconciliación con Kronecker que dio lugar a las interesantes cartas que recogemos. El berlinés, todo hay que decirlo, reaccionó de manera honesta y elegante; cabe pensar que, además de padecer engreimiento y un cierto autoengaño, fruto de su excesiva influencia y poder, Kronecker simplemente no había medido el efecto que sus declaraciones podían tener en la personalidad del antiguo alumno.

Continuaremos revisando la biografía de Cantor en el apartado 5, pero antes debemos atender a las características de los *Fundamentos* de 1883.

3. El dominio de lo transfinito.

Como ya he dicho, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* es un trabajo quizá único en la historia de la matemática. Su riqueza en contenido matemático es indudable, y en este sentido se trata de una obra clave de Cantor, escrita en plena madurez. Pero, como reconocía el propio autor en su correspondencia con Gösta Mittag-Leffler, el mismo contenido podía haberse comunicado en un trabajo mucho más corto (eliminando al menos 4 de las 14 secciones del escrito, así como las notas). Con esto se habría perdido buena parte de su encanto e interés, que se encuentra en la mezcla profunda y densa del material matemático con discusiones filosóficas y científicas.

La decisión de introducir los números transfinitos, la necesidad de justificar ese paso no sólo por razones técnicas o pragmáticas, sino también desde un punto de vista fundamental, llevaron a Cantor a ofrecer al público una nueva visión de sí mismo y de la naturaleza de su obra. Puede decirse que los *Grundlagen* constituyen una auténtica *confesión* del autor, que se quita la máscara de matemático estrictamente profesional, mantenida en todos sus artículos anteriores, y se revela como un hombre de talante muy especulativo. Las revelaciones contenidas en los *Fundamentos* plantean incluso problemas de interpretación del conjunto de la obra de Cantor.

Ese carácter de confesión filosófico-científica se muestra de diversos modos. En el tono de urgencia y gravedad que adopta Cantor ya en las primeras frases del trabajo, y que reaparece una y otra vez a lo largo del escrito. En las frecuentes referencias a Aristóteles, a los escolásticos, pero muy en particular a Leibniz y Spinoza. En las críticas, breves pero duras, a la concepción newtoniana y kantiana de la naturaleza y del conocimiento humano. En los latinajos que salpican la obra y contaminan la selección de terminología técnica, como se advierte sobre todo en el original alemán:

> … dass es nach dem Endlichen ein *Transfinitum* (welches man auch *Suprafinitum* nennen könnte), d.i. eine unbegrenztte Stufenleiter von bestimmten Modis giebt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, …

Aquí (*Fund.*, § 5) hace su primera aparición el término “transfinito”, que Cantor todavía no usará sistemáticamente; la palabra aparece en latín, junto a “suprafinitum” y “modis”, rodeada de citas latinas y de referencias a la tradición aristotélico-escolástica.

Lo mismo se trasluce, también, en la rica y compleja interrelación entre el texto principal y las notas al final originales. Digamos ya que estas *anotaciones* (como las llamaremos siempre) ofrecen claves importantísimas para comprender sus concepciones fundamentales. Las tres últimas contienen material matemático de gran importancia, añadido sin duda a vuelapluma cuando ya estaba compuesto el texto principal. Pero las primeras ofrecen aclaraciones sobre el concepto de conjunto, sobre filosofía de la matemática, sobre posibles aplicaciones científicas de las nuevas ideas, sobre la influencia de Platón, Leibniz y Spinoza, sobre la relación entre lo transfinito y el Absoluto divino.

3.1. Los *Fundamentos* ofrecen una nueva conceptualización del infinito. La idea de que es posible establecer gradaciones y distinciones en lo infinito era una novedad radical, en un campo que por su larguísima tradición y gran importancia parecía ya agotado. Ya hemos visto que esta idea comenzó a asentarse con la demostración, en el artículo de 1874, de que el conjunto **R** de los números reales es no-enumerable. Cantor pasó pronto a considerar las *potencias* o cardinalidades como gradaciones en lo infinito, pero sólo conocía dos de ellas (HC). En los *Fundamentos* dio con la manera de establecer una enorme mejora al respecto, creando una estructura fina para tales gradaciones.

La polémica sobre el infinito se retrotrae a los orígenes de la filosofía y la matemática, con las célebres paradojas de Zenón y las consideraciones de Aristóteles sobre el infinito actual y el potencial. Con su radical negación de la existencia de un infinito actual o en acto (que Cantor llamará infinito *propio*), y su afirmación del infinito potencial (*impropio*), Aristóteles estableció una posición muy coherente con la cosmovisión griega, que dejó una prolongada secuela histórica. Pero la polémica había continuado a lo largo de las disquisiciones escolásticas sobre filosofía y teología. Las discusiones clásicas en torno al infinito no se limitan a la cuestión de la aceptabilidad del concepto, ni a si puede concebirse un número infinito. En juego estaba también la infinitud de Dios o incluso del alma, así como las cuestiones de si el mundo está compuesto de infinitas partes, y si es infinito en su extensión espacial o temporal.

Esos problemas, y otros puramente matemáticos, procedían a fin de cuentas del intento de conceptualizar rigurosamente la noción del *continuo*, esa "madre de todas las batallas" en torno a los fundamentos de la matemática. Desde el **18** estuvo planteada la gran incógnita de hasta qué punto las cantidades infinitamente grandes () o infinitamente pequeñas (*dx*) eran imprescindibles para el desarrollo del cálculo y el análisis. Con la rigorización del análisis en términos de límites, épsilons y deltas (siglo **19**), esos problemas quedaban aparentemente superados, pero sólo al precio de *presuponer* como dado el conjunto de todos los números reales, un infinito actual. Cantor y otros dieron definiciones satisfactorias de los números reales (*Fund.*, § 9), pero estas definiciones sólo pueden formularse dentro de una teoría de conjuntos infinitos.

A menudo se ha ofrecido una reconstrucción histórica terriblemente simplista, según la cual la prohibición aristotélica habría permanecido en pleno vigor –al menos entre los matemáticos– hasta que Cantor defendió el infinito como algo plenamente aceptable en matemáticas. En varios lugares me he ocupado de ofrecer evidencia en contra de esa simplificación. Mientras las discusiones se plantearon en los términos de si es posible una cantidad o un número infinito, hubo mucha confusión; pero la cosa cambió cuando se empezó a pensar en términos de conjuntos. Esto último sucedió hacia 1850, y los nombres que es imprescindible mencionar son los de Bolzano y Dedekind; de ambos tiene cosas que contarnos Cantor en los *Grundlagen*.

Cantor logra ofrecer una argumentación sumamente rigurosa y aclaratoria en torno a lo infinito y al continuo. Son muchas las cosas que allí se dicen, por ejemplo las incisivas consideraciones que permiten dar de lado a las paradojas elaboradas por los filósofos en el intento de demostrar que no hay números infinitos. Pero no se trata aquí de repetir las ideas que expresa con tanta claridad en el texto, sino de enfatizar la importancia y las implicaciones de alguna de ellas.

En una consideración retrospectiva, tienen especial importancia los comentarios que realiza Cantor –§ 5 y anotación 2– al distinguir dos géneros de infinitud (propia o actual) muy diferentes. Es un punto en el que sus ideas matemáticas entroncan de manera al parecer indisoluble con consideraciones teológicas, lo que resulta incómodo para muchos lógicos y matemáticos. Tradicionalmente se ha identificado el infinito actual con Dios, de manera que más allá de lo finito estaba ya el absoluto.

Cantor, en cambio, propone un esquema tripartito: *finito*, *transfinito*, *absolutamente infinito*, siendo estos dos últimos los dos géneros de infinitud que mencionábamos. Esta posición se encuentra desarrollada en detalle en el artículo de 1886 que hemos traducido. En conexión con el problema de las paradojas (que discutiremos en la sección 7), es importante resaltar que años más tarde Cantor se vería forzado a cambiar un elemento sutil pero importante de esa posición filosófica: tras descubrir los argumentos concretos que dan lugar a las paradojas conjuntistas, tuvo que admitir que el infinito absoluto no es *actual*, sino *potencial*.

Pero volvamos a 1883 y la distinción primitiva entre dos infinitos actuales. Esa distinción permitía salir al paso de una objeción de origen filosófico-teológico contra la matemática transfinita. La identificación tradicional del infinito con Dios sugería que, al someter a consideración matemática el infinito actual, estaríamos tratando de "determinar" lo divino mediante nuestros conceptos. Y los teólogos medievales, cristianos o no, habían afirmado que a Dios sólo cabe representarlo mediante atributos negativos (diciendo por ejemplo que es in-finito, in-temporal, o que su poder no conoce ningún límite –la omnipotencia se entiende también como un predicado negativo–). Determinar a Dios de manera positiva, digamos, asignando un número transfinito a su poder, sería una terrible herejía.

Cantor se toma esta cuestión con toda seriedad, y elude la objeción señalando que el dominio transfinito *no agota* el infinito actual. No debe nunca identificarse lo transfinito con lo Absoluto. Los transfinitos son más parecidos a lo finito, en la medida en que admiten plena determinación y son caracterizables por el pensamiento humano. Lo Absoluto elude en cambio toda determinación: lo divino puede a lo sumo reconocerse, pero nunca conocerse; lo Absoluto está estrictamente más allá de lo transfinito. (Años más tarde, cuando cambia de posición respecto a lo absolutamente infinito, Cantor podrá insistir en ese mismo argumento con mayor razón.)

Desde el punto de vista de la lógica y la matemática, lo más llamativo es que esta posición de Cantor le permitió estar preparado para dar una respuesta positiva a las célebres contradicciones o paradojas de la teoría de conjuntos. La conexión es la siguiente. En las anotaciones, Cantor señaló que los números transfinitos nos llevan más y más lejos, indefinidamente, conduciéndonos a cardinalidades infinitas cada vez mayores. No hay un máximo en la progresión de los ordinales, ni en la de las potencias, por lo que debe decirse que la "totalidad" de los números transfinitos (y la de las potencias) son de carácter absolutamente infinito. Por eso son un símbolo adecuado de Dios pero, inversamente, la indeterminabilidad de Dios habrá de aplicarse también a esas totalidades absolutamente infinitas: la colección de "todos" los ordinales transfinitos, como la de "todas" las potencias (o cardinales transfinitos), ya no son comprensibles para el pensamiento matemático. Retomaremos este tema en la sección 4.

3.2. Hay otro elemento especulativo en los *Grundlagen* que resulta sumamente llamativo. Por primera vez en su carrera, Cantor pone sobre el tapete una serie de cuestiones en torno a la concepción del mundo físico, y manifiesta su convicción de que la teoría de conjuntos se convertirá en instrumento fundamental de un cambio en la "metafísica". Aquí empleo esta palabra, como él, para referirme a cuestiones ontológicas acerca de *lo que hay* en el mundo y de cuáles son los principios básicos que lo rigen. Si nos tomamos en serio los *Fundamentos* –y su autor nos invita a ello continuamente–, hay que pensar que estas aplicaciones metafísicas le importaban tanto o más que las propiamente matemáticas.

La cuestión aparece en el § 5 y en las anotaciones 2, 5, 6 y 7; aparece también en el § 8, una sección clave sobre filosofía y metodología de la matemática. Los problemas principales que preocupan a Cantor en estos párrafos pueden clasificarse en cuestiones epistemológicas (de teoría del conocimiento) y cuestiones "metafísicas". En el § 5, habla de manera clara y decidida en contra de la *concepción mecanicista* de la naturaleza, defendida por la gran mayoría de sus contemporáneos científicos, comenzando por figuras de la talla de Hermann von Helmholtz. En su opinión, esa concepción debe ser complementada –o incluso sustituida– por una *concepción orgánica*, lo que constituye una clara toma de posición en contra del reduccionismo físico-químico habitual entre sus contemporáneos. La adecuada comprensión de los fenómenos de la vida y de los fenómenos mentales *exige*, cree Cantor, principios nuevos.

Si el mecanicismo ha contado desde tiempos de Newton con el potente apoyo del cálculo matemático, Cantor cree que las nuevas ideas conjuntistas van a convertirse en instrumento clave para el organicismo. Sus planteamientos a este respecto parecen concordar, en cuanto a dirección esencial, con las ideas defendidas un siglo más tarde por un René Thom. Y no deja de resultar notable que puedan advertirse conexiones entre esa convicción y alguna de las cuestiones "lógico-matemáticas" que Cantor trata en su trabajo: concretamente, su manera de enfocar la definición del continuo (*Fund.*, § 10).

Varios de los trabajos publicados por Cantor en la década de 1880, a partir de los *Fundamentos*, vuelven sobre la idea de que los conjuntos transfinitos están representados en la naturaleza física y en la mental. Y esto no se encuentra sólo en artículos filosóficos, sino de manera especial en los que preparó para *Acta Mathematica*. En 1885 proponía un refinamiento conjuntista de la hipótesis del éter (esencial en la física de entonces): las partículas de éter constituirían un conjunto con la potencia del continuo, mientras que las de materia atómica formarían un conjunto enumerable. Es en conexión con todo este complejo de ideas que adquieren sentido las numerosas referencias de Cantor a filósofos como Platón, Spinoza y Leibniz, y también sus críticas a Kant.

Las ideas metafísicas de Cantor se quedaron en meras sugerencias, y desde luego no tuvieron ningún impacto sobre la física y la biología de su tiempo. Pero esto no obsta para que debamos preguntarnos si, entre los motivos que le llevaron a desarrollar la teoría de conjuntos de puntos y la de conjuntos transfinitos, no se encontrarían desde el principio los planteamientos especulativos que afloran por primera vez en los *Fundamentos*.

3.3. La problemática que se plantea Cantor es un caso típico de matemática *pura*, o mejor purísima. Al decir "pura" nos referimos a que los problemas abordados no provienen de otras ciencias relacionadas, sino que surgen en el proceso interno de desarrollo del propio conocimiento matemático, como resultado de o en conexión con soluciones obtenidas para problemas anteriores. El concepto de los números reales surge en un intento de analizar la idea del continuo, que resulta muy útil para la comprensión de procesos físicos; pero cuando nos planteamos la cuestión de cuál es la cardinalidad o potencia del conjunto de los reales, estamos ante una pregunta intramatemática o "pura". Hay mucha evidencia de que los problemas que preocupaban a Cantor eran *tan* puros y abstractos, que sus propios colegas –a los que los historiadores no dudan en calificar como matemáticos puros– no veían el sentido de sus investigaciones.

Eso nos consta por muchas de las reacciones registradas de autores importantes de la época. Vale la pena ver algún ejemplo. En 1883, varios grandes matemáticos franceses, del entorno de Charles Hermite, estuvieron ocupados revisando las traducciones de artículos de Cantor que aparecerían ese año en *Acta Mathematica*. Tras haber discutido algunos de esos trabajos con sus colegas, Hermite escribe a Mittag-Leffler en abril de 1883:

> La impresión que las memorias de Cantor hacen en nosotros es desastrosa. Leerlas nos parece a todos una completa tortura. … Nos ha sido imposible encontrar, entre los resultados que pueden entenderse, uno solo que tenga un *interés real y presente*.

Y esta crítica la aplica a la demostración de que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$ son equipotentes. Según cuenta Hermite, Émile Picard ha leído los *Grundlagen* "sin cesar de maldecir al autor", y sólo Poincaré, "si bien juzga [dichas ideas] muy prematuras en el estado actual del análisis, cree como Ud. que tienen importancia".

He aquí la opinión de Henri Poincaré acerca de los *Fundamentos*:

> El Sr. Hermite me ha dicho que le ha solicitado Ud. al Sr. Cantor suprimir de su memoria *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* toda la parte filosófica y traducir al francés la parte matemática. Me parece que lo que hará la lectura de la traducción de esta bella memoria muy penosa, para los franceses que no están familiarizados con la cultura alemana, es menos la parte filosófica, que uno siempre sería libre de ignorar, que la falta de ejemplos un poco concretos. Así, esos números de la segunda y sobre todo de la tercera clase tienen un poco el aire de una forma sin materia, lo que repugna al espíritu francés. […] Sería necesario, para hacerla accesible, dar algunos ejemplos precisos a continuación de cada definición, y además poner las definiciones al comienzo en lugar de ponerlas al final. Se le permitiría así al lector francés que comprendiera este bello trabajo, pese a la ignorancia en que está de las investigaciones anteriores [del autor].

Hoy leemos los *Grundlagen* con la convicción de que es una contribución capital al pensamiento matemático y una obra genial. El gran Poincaré nos recuerda cuáles podían ser las sensaciones del lector que se aproximaba a la obra sin prejuicios sobre su valor.

Y no hay que olvidarse, claro, de las consideraciones críticas ofrecidas por un matemático muy influyente, interesado también por la filosofía, y muy preocupado por las cuestiones de fundamentos: Leopold Kronecker. Nos lo cuenta el propio Cantor:

> Kronecker, que me visitó a principios de julio, me explicó con las risas más amistosas que se había escrito mucho con Hermite a propósito de mi último trabajo, para demostrarle que todo ello no son más que "patrañas". Como ya me he acostumbrado a semejantes declaraciones, no me enfadé por ese comentario, sino que tuve mi pizca de diversión. De los números suprafinitos dijo, para entretenimiento mío, que "sólo *en el cielo* esperaba llegar al punto de lograr entenderlos". Pero, por más gracia que me haga, la cosa no deja de ser seria, en la medida en que una cantidad enorme de matemáticos ven sus juicios determinados por las opiniones de Kronecker, quien, como bien sabemos, las lanza con el mayor énfasis y *sans géne*.

Durante los siguientes meses, Cantor se obsesionaría cada vez más con las críticas y las "intrigas" que, según creía, orquestaban contra él Kronecker y sus seguidores.

Todo esto nos recuerda que en los trabajos de Cantor no se trata de una tendencia matemática 'neutra', por así decir, sino de una clara toma de partido por el *enfoque abstracto* que iba consolidándose precisamente en aquella época. El avance del enfoque abstracto resultaba especialmente visible en las contribuciones de Riemann a la teoría de funciones, en las de Dedekind a la teoría de números algebraicos, o en las del propio Cantor a la teoría de series trigonométricas y de conjuntos de puntos. Y las protestas no se hicieron esperar: surgieron voces que recomendaban volver a los procedimientos más calculísticos, típicos de la matemática del siglo **18**. En Alemania, el mayor y más influyente detractor de la matemática abstracta fue Kronecker: todo debía reconducirse a desarrollos algorítmicos basados en los números naturales, lo que implicaría una reforma del análisis en sentido constructivista, comenzando con el repudio de los números irracionales (véase *Fund.*, § 4). Aunque Kronecker nunca había criticado las ideas de Cantor por escrito, sí lo había hecho en privado; además, en 1882 había publicado una crítica directa a las contribuciones de Dedekind.

Cantor era muy consciente de esta situación, sabía que Kronecker tenía un elevado grado de influencia en la adjudicación de plazas universitarias y sobre las opiniones de sus colegas, a través de las múltiples conversaciones y contactos que mantenía con ellos. La introducción de los números transfinitos no sólo era un paso más en la dirección abstracta, sino un paso sumamente atrevido. Anticipando que Kronecker y sus seguidores mostrarían públicamente –pero no por escrito– su oposición, y que incluso le ridiculizarían por la dirección 'incorpórea' que tomaban sus ideas, Cantor decidió romper una lanza en favor de la matemática abstracta.

El § 8 de la obra presenta su alternativa: una descripción muy interesante, aunque especulativa y teñida de idealismo, de la filosofía subyacente a la matemática abstracta. Aquí se establece una distinción clave entre la matemática y otras ciencias, y se plantean como *únicos* requisitos a tener en cuenta en la introducción de conceptos matemáticos:

la consistencia interna o ausencia de contradicciones,

la coherencia con los conceptos matemáticos previamente aceptados,

y el ser fructíferos, que tengan implicaciones de importancia.

La matemática no es una ciencia empírica, y los conceptos que maneja no tienen por qué limitarse a lo "realmente existente" en el mundo físico. De ahí que no haya necesidad de restringirlos según criterios de realidad externa (“transiente”, dice Cantor con lenguaje que probablemente es de origen teológico), bastando exigirles que sean coherentes lógicamente y que resulten fructíferos.

Todo esto, la orientación abstracta y la tendencia purista, se resumen en la célebre frase:

> Das *Wesen* der Mathematik liegt *gerade* in ihrer *Freiheit*.
> La *esencia* de la matemática radica *precisamente* en su *libertad*.

El lector debe, claro está, cuidarse de entender esto en un sentido libertario. La libertad de la que se habla no es de ningún modo absoluta, sino que –como siempre en la libertad humana– está sometida a rígidas constricciones (en este caso, los tres requisitos de consistencia, etc.). Pero la matemática, más que una disciplina pura y abstracta, es para Cantor una disciplina en la que se cifra la libertad del pensamiento humano en su exploración de posibles conceptos y estructuras. Todo un programa, expuesto con tanto ardor como podía poner Schiller en su *Oda a la libertad*. Las similitudes que encontramos entre el Cantor del § 8 y los autores románticos son numerosas, tanto al nivel de estilo como al de presupuestos metafísicos y propuestas científicas.

Hay otro sentido en el que Cantor defendió la libertad del matemático. Otras figuras menores que él tuvieron carreras académicas más exitosas que la suya, y esta experiencia le resultó enormemente amarga. Reaccionando con cierta manía persecutoria, pensó que le iban aislando y atacando cada vez más. Al diablo con los colegas matemáticos, fue su primera reacción: desde 1885 estableció lazos cada vez más cercanos con filósofos y teólogos, pero luego supo rehacerse y sacar una lección más positiva de su triste experiencia. Puso en marcha toda su capacidad epistolar y de convicción, que no era poca, para con la ayuda de otros colegas estimular la creación de la *Unión de Matemáticos Alemanes* (*DMV*) en 1890 (hablaremos algo más de ello en la sección 5). Libertad de pensamiento matemático, sí, pero también libertad de acción.

4. La hélice virtuosa: ordinales y cardinales.

Cantor dedica no poco espacio de los *Fundamentos* a argumentar que en los números transfinitos no existe ninguna contradicción oculta. Pero lo verdaderamente notable es cómo encuentra en ellos lo que no dudo en calificar como una *hélice virtuosa*. Un círculo vicioso nunca nos hace avanzar: ya se sabe que las revoluciones completas nos devuelven al punto de partida. Pero si el movimiento de revolución vuelve sobre un plano distinto, si se trata de una hélice, entonces tiene lugar un avance.

4.1. Las ideas clave acerca de cómo justificar la introducción de los ordinales transfinitos, y de cómo definir las *clases numéricas*, quedaron bien establecidas ya en octubre de 1882. Se trataba de dos "principios de generación", que permitían proseguir indefinidamente el proceso de formación de números hacia lo suprafinito, llegando a cifras nuevos números como los que siguen. Tras *todos* los números naturales vienen:

, +1, … +n, …

de acuerdo con el primer principio de generación, que nos da un sucesor (+1) para todo , y tras todos estos, por el segundo principio, viene ·2:

·2, … ·2+n, … ·3, … ·n, …

y tras todos los ·n+m, el proceso continua:

^{2}, … ^{2}+·n+m, … ^{3}, … ^{n}+$^{n-1}$·m+…+r, … , …,

y se prosigue con números tan fantásticos como elevado a omega veces, y mucho más allá, *ad suprafinitum* y *ad absolutum*.

Claro está que estos dos principios, y especialmente el segundo, podían despertar sospechas en los lectores. El primer principio de generación nos garantiza la existencia de un sucesor, poca cosa. El segundo principio es mucho más arriesgado: dada una sucesión *cualquiera* de números, que crece sin tener un máximo, existe un nuevo número ordinal que es el *inmediatamente siguiente* a los de la sucesión. Este principio es la clave que nos 'garantiza' la *existencia* de , ·2, ·3, … ^{2}, ^{3}, … , … y así sucesivamente. Ni que decir tiene que estas ideas no tenían en realidad valor probatorio, ni ofrecían una definición –no digamos axiomatización– rigurosa del dominio de objetos pretendido. Eran más bien la descripción intuitiva de un proceso de creación que podría llevar a cabo un demiurgo, un ser divino, en su vida eterna.

Ahora bien, ordinales como , ·2 y ^{2} no plantean ningún problema: es sencillo establecer explícitamente ordenaciones no estándar del conjunto N de los números naturales, bajo las cuales le corresponden esos números. Por ejemplo, +n corresponde al conjunto ordenado:

{n+1, n+2, n+3, …, 1, 2, …, n–1, n};

y ·2 puede obtenerse de varias maneras, como puede ser:

$$\{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\},$$

poniendo primero los números impares y después los pares. Esto quiere decir que, si aceptamos como dado en acto el conjunto infinito N, debemos aceptar los ordinales cantorianos de la *segunda* clase numérica. De manera análoga, si estamos dispuestos a aceptar como dado el conjunto **R** de los números reales, debemos aceptar los ordinales cantorianos de *al menos* la tercera clase. Pero, ¿puede llegarse más allá? ¿No entrañará contradicciones, superando los límites de la libertad matemática?

La respuesta se hace mucho más clara y concreta cuando disponemos de una axiomatización de la teoría de conjuntos, pero Cantor nunca dio este paso. Puede pensarse, entonces, que su única justificación estaba en sus convicciones metafísicas: la fe ciega en que todos los conjuntos transfinitos, los ordinales y las potencias están en el universo platónico de la mente divina, y por ello en la naturaleza (*Fund.*, § 7, § 8 y anotación 2). Pero no es tan simple: tenía también argumentos mucho más concretos y matemáticos; basta considerar las funciones de **R** en **R** para vernos llevados más allá (*Fund.*, anotación 10), de modo que, si estamos dispuestos a aceptar como dado el conjunto de *todas* las funciones reales, otra vez arribamos a nuevas clases numéricas.

¿Hasta dónde concretamente? ¿Dónde acaba lo admisible, que supuestamente empieza en N y **R**, y dónde comienza lo inconsistente, que claramente ponen ante nosotros las paradojas conjuntistas? La solución a esto –en la medida que admite solución– la darían el propio desarrollo de la teoría axiomática de conjuntos y los larguísimos debates en torno a los fundamentos de la matemática.

Vemos que al menos el proceso de formación de ordinales codificado mediante los dos "principios de generación" tiene cierta justificación desde la mentalidad matemática clásica. En sus prisas por publicar los *Fundamentos*, Cantor no argumentó bien ese punto, que para él resultaba casi obvio; pero pronto tenía otro modo de presentar las ideas clave de los números transfinitos (véanse las cartas de 1884) que las hacían más aceptables para los matemáticos contemporáneos.

Pero lo que así obtenemos parece inutilizable: si el proceso es absolutamente interminable, dice Cantor, entonces no alcanzamos nada que pueda dar rendimientos matemáticos concretos. La clave de todo el asunto, lo que da al edificio su belleza, es un *tercer* principio: el de *restricción o limitación*. Éste establece, de una manera regular y armoniosa, conjuntos de ordinales a los que Cantor llama *clases numéricas*, que a su vez permiten definir una serie de cardinalidades sucesivas.

La condición clave para definir las clases numéricas es una condición de cardinalidad. Los números de la *primera clase* son todos aquellos tales que el conjunto de sus antecesores es finito; es decir, los naturales. La potencia de esa primera clase es la primera potencia transfinita, $_0$ (léase: alef sub cero) en la terminología que Cantor establecería en 1895. Los números de la *segunda clase* son todos los que tienen un conjunto de antecesores enumerable (de la potencia $_0$); este es el caso de , , etc. Y lo importante es que la potencia o cardinalidad de la segunda clase en su totalidad es precisamente la segunda potencia, $_1$, como Cantor demuestra (*Fund.*, § 12 y § 13). La *tercera clase* es la de los ordinales cuyos antecesores forman un conjunto de la potencia $_1$, y esta clase tiene la potencia $_2$. Y así sucesivamente.

Las clases numéricas quedan definidas mediante una condición de cardinalidad, y las cardinalidades se definen por medio de las clases numéricas. He aquí algo que podría parecer un círculo vicioso a un lector poco cuidadoso, pero que en realidad es *hélice virtuosa*, y presta a la extraordinaria invención –¿o descubrimiento?– de Cantor un atractivo muy especial. De este modo se conseguía definir una *escala transfinita* de potencias sucesivamente crecientes. Esto constituyó un avance extraordinario, porque así se podía precisar el problema del continuo. Llamando c a la cardinalidad del continuo, la Hipótesis de Cantor dice exactamente que c es la potencia de la segunda clase numérica:

$$\mathsf{c} = {}_1.$$

4.2. ¿Cómo llegó Cantor al principio de restricción o limitación? No podemos aquí más que dar una indicación. Los *Grundlagen* comienzan diciendo que su autor se ve incapaz de dar el menor paso adelante en teoría de conjuntos si no introduce los números transfinitos. Esto no era una figura retórica, sino estrictamente cierto. En la anterior entrega de la serie 'Sobre variedades de puntos infinitas y lineales', Cantor había prometido demostrar el siguiente teorema:

> si el conjunto derivado $P^{()}$ es vacío para algún , entonces el primer derivado P' y el propio conjunto P son enumerables.

Y nuestro matemático buscaba también establecer la inversa de ese teorema, lo que llamaremos el

Teorema : si el primer derivado P' –y por tanto P– es enumerable, entonces existe algún tal que el conjunto derivado $P^{()}$ es vacío.

Para demostrar esto se vio obligado a centrar su atención en los índices , ya que un resultado de existencia requería disponer de conceptos más precisos al respecto, y la demostración le llevó de forma natural a imponerles una condición restrictiva. Esta condición era exactamente la que corresponde a la definición de la segunda clase numérica: el conjunto de los antecesores de debe ser enumerable.

Se trataba pues del principio de limitación restringido al caso particular más simple. Según comentó Cantor a Mittag-Leffler:

> La demostración de este teorema [] se encuentra bastante escondida, de modo que he debido buscarla en vano desde hace literalmente años; mas ahora puede ser expuesta con bastante facilidad.

El resultado era generalización de otro más simple que Cantor había dado por válido ya en su artículo de 1878, y es probable que anduviera buscándolo desde entonces. Pero sólo tras la introducción de los ordinales transfinitos le resultaba posible superar los escollos.

Ahora había quedado definido de manera natural, y bien caracterizado, un conjunto de números que incluía todos los 'símbolos de infinitud' previamente conocidos. Cantor se preguntó cuál era la potencia de este conjunto, y ya el 25 de octubre de 1882 era capaz de contestar que se trata justamente de la *segunda* potencia infinita. Inmediatamente advirtió cómo se podía desarrollar la idea, estableciendo el principio de limitación en su forma general, para definir algo así como una regla de medir transfinita, a cuya luz el problema del continuo tomaba una forma matemática precisa. El avance era innegable.

4.3. Este espléndido logro quedaba supeditado a la posibilidad de hablar de los ordinales transfinitos como objetos que pueden formar conjuntos, como *verdaderos números*. Tras cien años de práctica axiomática moderna y de formalismo, el sentido de esta objeción les resultará opaco a muchos matemáticos. Pero hay que pensar que Cantor pertenece a una generación pre-formalista, y que en su opinión la matemática trabaja con objetos bien definidos y reales, que existen en alguna esfera del pensamiento. Hay buenos motivos –creen Cantor y sus contemporáneos– para tratar como objetos a los puntos y rectas del espacio, a los números naturales y a los reales, a las funciones continuas e incluso a las discontinuas. ¿Los hay para hacer lo propio con esos “símbolos”, los ordinales transfinitos?

Si recordamos lo que sucedió en el caso análogo de los números complejos, nos resultará más fácil comprender el punto de vista cantoriano. Los complejos fueron mirados con gran desconfianza mientras parecían ser meros símbolos con los que era posible operar, pero a los que no se podía asignar una referencia clara. En su favor hablaba el hecho de que se les aplicaban exactamente las mismas reglas de cálculo que a los otros números, en su contra que su interpretación resultaba más que oscura. Es la época en que eran llamados números “imaginarios” por contraposición a los reales, números “imposibles”. Esto cambió cuando ellos y sus operaciones fueron interpretados en términos de segmentos dirigidos sobre el plano (vectores), o en términos de puntos (pares de números reales). Se les había asignado una referencia, y ya no había ninguna razón para ignorarlos o considerarlos más “irreales” que los números irracionales. Por eso la denominación cambió, de “imaginarios” a meramente “complejos”. Y Gauss extendió a ellos la teoría de números: todo un vuelco histórico.

Como nos recuerda Cantor, hasta 1882 los ordinales había sido para él meros “símbolos de infinitud”. Lo real eran los conjuntos de puntos que estaba estudiando y las operaciones a las que se podían someter, entre ellas la operación de formar el conjunto derivado. En el estudio de esta operación sobre conjuntos de puntos, era necesario introducir índices que, sorprendentemente, continuaban hasta el infinito y más allá. Pero, de momento, no había razones para pensar que esos índices o símbolos fueran números.

El argumento de Cantor a favor de que los números transfinitos son *verdaderos números* consiste esencialmente en tres puntos: 1º) entre ellos pueden definirse operaciones aritméticas, las cuales siguen reglas análogas –aunque no idénticas– a las del álgebra habitual; 2º) son susceptibles de una interpretación perfectamente natural e interesante, tienen una referencia clara en términos de conjuntos infinitos bien ordenados; y 3º) es posible extender la teoría de números a este nuevo dominio. Nótese el paralelismo exacto entre este caso y lo antes dicho de los números complejos.

Conviene también recordar el enorme prestigio que tenía entre los alemanes la teoría de números: por influencia de Gauss, éste era quizá el campo matemático de mayor prestigio en aquel momento y lugar. Los primeros trabajos de Cantor (doctorado y habilitación) fueron de teoría de números, y los *Fundamentos* anudaron con ese viejo hilo al abrir el campo enorme e inexplorado de la teoría de números transfinitos. Cantor tenía, pues, razones para pensar que su nueva contribución podía traerle fama inmortal y éxito en su carrera, aunque sólo lo primero se cumplió.

No es necesario decir aquí nada más sobre los puntos 1º y 3º, abundantemente tratados en los *Fundamentos* (§§ 1–3, 14). Pero sí conviene decir algo más sobre el 2º. Se trataba para Cantor de un punto capital, como no podía ser menos si tenemos en cuenta que hablamos de cuál es la referencia o la interpretación de los nuevos números. Respuesta: cada ordinal transfinito representa el ordenamiento de los elementos de un conjunto *bien ordenado*, es decir, un conjunto *C* ordenado de modo que tanto *C* como cualquiera de sus subconjuntos tiene un primer elemento (*Grundlagen*, § 2).

A partir de una conferencia que dio en septiembre de 1883, Cantor adoptaría un nuevo punto de vista en la introducción de los ordinales transfinitos. Abandonó los principios de generación y tomó como punto de partida –como el suelo firme sobre el cual se instalan los ordinales– los conjuntos bien ordenados:

> Parto del concepto de "conjunto bien ordenado", llamo conjuntos bien ordenados del *mismo tipo* (o del mismo número) a aquellos que permiten relacionar entre sí sus elementos biunívocamente, *salvaguardando la ordenación* [Rangfolge] *en ambos lados*, y entiendo por número el signo o el concepto para un *tipo determinado* de conjuntos bien ordenados. Limitándonos a los conjuntos *finitos*, se obtienen de esta manera los números enteros finitos. Pero si pasamos a considerar todos los tipos de conjuntos bien ordenados de la *primera* potencia, llegamos necesariamente a los números transfinitos de la segunda clase, y mediante ellos a la *segunda* potencia.

Desde esta época, Cantor fue siempre de la opinión de que los números son *conceptos*. En sus *Beiträge* de 1895, dice que el "tipo de orden" de un conjunto es el "concepto general" que se obtiene al hacer abstracción de las peculiaridades de los elementos, pero preservar las relaciones "de rango" entre ellos; si además hacemos abstracción de la ordenación, se alcanza el concepto de la potencia o cardinalidad del conjunto.

Cantor coincidió con Frege y Russell en entender los números primariamente como cardinales: 2 o 3.000 son ante todo *cantidades* de elementos. Sin embargo, al introducir los números transfinitos se estaba situando en el punto de vista opuesto, ya que y sus sucesores son números ordinales, representantes de tipos de (buen) orden. Sólo pensando en los números como *ordinales* podemos llegar a afirmar que los transfinitos son "verdaderos números". Hay razones para pensar que esta transición fue facilitada por los encuentros que Cantor tuvo con Dedekind en septiembre de

1882.

Durante estos encuentros, Cantor conoció por vez primera las ideas de su colega sobre la fundamentación del número natural. Durante la semana que ambos coincidieron en Harzburg (localidad vacacional en las montañas del Harz), Dedekind le prestó el manuscrito que había ido escribiendo de 1872 a 1878. Contenía su célebre definición de finito e infinito, empleada como base para una teoría puramente deductiva, y también su teoría de cadenas, su definición semi-axiomática de la estructura del conjunto de los naturales, y el desarrollo de la aritmética elemental (véase Dedekind 1998).

El punto de vista de Dedekind había sido siempre entender los números primariamente como ordinales: 2 o 3.000 son ante todo ordinales, *indicadores de posición* dentro de un ordenamiento. Y su teoría de los números se basaba en la consideración de lo que llamó "la *cadena* de un conjunto", y en particular en el recurso a las cadenas $\{n\}_0$ (formadas por n y todos sus sucesores), que son conjuntos infinitos bien ordenados. Dedekind resaltaba así que cada número n está asociado a dos conjuntos ordenados: el "segmento inicial" $\{1, 2, \ldots n\}$ y la "cadena" infinita $\{n, n+1, \ldots\} = \{n\}_0$. El estudio de estos conjuntos ordenados infinitos $\{n\}_0$ era la base de la rigurosa fundamentación conjuntista de la aritmética que ofreció.

La transposición de este tipo de consideraciones al caso de los "símbolos de infinitud" fue una de las claves de la innovación que Cantor advirtió –o recibió de la inspiración divina– en octubre de 1882. Inmediatamente después de su encuentro en Harzburg, Cantor escribe cartas en las que discute, por primera vez en su carrera, ideas generales sobre conjuntos ordenados. Y en el plazo de un mes da el paso clave hacia los ordinales transfinitos. Hay pues motivos para pensar que el intercambio de ideas con Dedekind desempeñó un papel heurístico importante.

4.4. Un aspecto llamativo de la obra de Cantor, ya comentado, es su tendencia a concentrarse en problemas especulativos. Desde 1874, y salvo casos más bien aislados, centró su atención en cuestiones "de principio" y desatendió sus posibles aplicaciones en ramas bien establecidas de la matemática. Esto resulta tanto más llamativo, cuanto que la aceptación de sus ideas y el éxito de su propia carrera como matemático se hubieran beneficiado grandemente de un mayor énfasis en cuestiones de "interés real y presente" –por decirlo con palabras de Hermite–. Pero sin duda se trata de un rasgo característico de la orientación mental del genial matemático.

Con todo, naturalmente Cantor era consciente de que sus resultados tenían implicaciones, sobre todo en análisis. La teoría de conjuntos de puntos había nacido dentro del análisis real (teoría de series trigonométricas), el campo matemático 'estándar' donde Cantor realizó contribuciones propias de mayor importancia, de 1870 a 1872. El estudio de los *conjuntos de unicidad* de series trigonométricas fue precisamente lo que le llevó a introducir, en 1872, el concepto de conjunto derivado. En los años siguientes, autores como P. du Bois-Reymond, U. Dini y J. Harnack hicieron uso de la idea en diversos intentos de profundizar en el concepto de integral.

Cantor mismo contribuyó en 1882 y 1884 a esa línea de investigación, que años más tarde desembocó en los estudios de Borel y Lebesgue sobre integración y teoría de la medida. Pero, además, Cantor estaba convencido de que el concepto de potencia o cardinalidad resultaría de importancia capital en análisis. Aquí su opinión sobre una cuestión matemática estaba en parte condicionada por sus intereses especulativos, y puede decirse –con las debidas precisiones– que su juicio no fue muy acertado.

El estudio de los conjuntos de puntos tiene importancia también en teoría de funciones (complejas) y Cantor era bien consciente de alguna de sus aplicaciones en este campo. En particular, a lo largo de la correspondencia que mantuvo con Mittag-Leffler en 1882 se discute cómo el Teorema (sección 4.2) permite avanzar en el estudio de las funciones analíticas. De hecho, la cuestión sale a relucir en el último párrafo del § 3 de los *Fundamentos*, y efectivamente, en 1884 Mittag-Leffler consiguió demostrar su resultado más importante, estableciendo la representación de una función meromórfica en términos de sus partes singulares. El teorema de Mittag-Leffler constituía una conclusión natural para un importante campo de investigación abierto por Weierstrass.

En 1895 Minkowski escribía a su amigo Hilbert: "De nuevo me he dado cuenta de que Cantor es uno de los más geniales matemáticos vivos". Una de las principales razones que llevaban a los matemáticos a maravillarse de la profundidad y la genialidad de Cantor, en torno a 1900, es que su problemática y sus resultados, tan especulativos, reaparecían de manera increíble como elementos clave para la obtención de resultados tangibles y bien comprensibles. Valgan las anteriores indicaciones como muestra de ello.

5. La década del distanciamiento: 1885–1895, y más allá.

Hemos visto cómo Cantor sufrió en 1884 una crisis mental, producto de la tensión que le provocaba su enfrentamiento con Kronecker y su sensación de ser "perseguido" entre los matemáticos alemanes. La serie de sinsabores era ya larga: primero, el fracaso en conseguir una cátedra en una universidad importante, especialmente Berlín; segundo, el fracaso en su plan alternativo de hacer de la necesidad virtud, convirtiendo a Halle en un gran centro matemático; en suma, la experiencia de ir perdiendo los apoyos relacionados con la escuela de Berlín, sin ganar otros a cambio, sabiendo lo que esto significaba en la política académica del Imperio alemán.

Pero eso no fue todo, porque en 1885 vendría la culminación de sus fracasos.

Las nuevas ideas acerca de los ordinales transfinitos y los conjuntos bien ordenados, plasmadas en los *Fundamentos*, movieron a Cantor a una generalización, estudiando la teoría de los tipos de órdenes lineales (totales). Como era ya habitual en él, en lugar de madurar esa teoría y esperar a que diera frutos –confiaba, como tantas veces, en que le permitiría resolver la Hipótesis del Continuo–, Cantor se dio mucha prisa en publicar. A comienzos de 1885 el artículo estaba siendo compuesto por los tipógrafos de *Acta Mathematica*, cuando Cantor recibió una carta de Mittag-Leffler recomendándole que aplazase la publicación hasta obtener resultados más tangibles. El consejo tenía mucho de sensato, pero Cantor creyó ver en ello los intereses egoístas de Mittag-Leffler, que habría temido enemistarse con los berlineses al dar demasiado apoyo al de Halle. Probablemente había algo de verdad en esto, y el hecho es que Cantor se sintió definitivamente expulsado de la comunidad matemática.

Desde 1878 había decidido no publicar en el *Journal* berlinés; ahora *Acta* se sumaba a la lista; y en cuanto a los *Annalen* de Klein, aunque le habían prestado una ayuda inestimable, Cantor no encontró en su editor ya sea la comprensión intelectual, ya el apoyo político que hubiera deseado. En los 10 años siguientes, Cantor renunció a publicar en revistas matemáticas. Se acercó más aun a la filosofía y la teología, e incluso propuso a su Universidad que su campo de docencia se desplazara a la primera (aunque el fracaso entre los alumnos de un primer curso sobre Leibniz le disuadió). Publicó tres ensayos en el *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, notablemente una publicación de orientación fichteana que retomaba el teísmo ético de Leibniz.

Hay que decir, en honor a la verdad, que las relaciones de Cantor con sus colegas más cercanos fueron más bien tormentosas. El primer caso fue el de Schwarz, que pasó de ser el gran amigo de los años de estudiante, valedor para la plaza de Halle, a enemigo directo. No sabemos bien cuáles fueron las circunstancias, pero probablemente Schwarz no viera con buenos ojos los "coqueteos" de Cantor con revistas como los *Annalen* en 1872, ni tampoco su inusual actitud al postularse para una plaza en 1875, ni la dirección cada vez más especulativa de sus trabajos. En 1883 Kummer se retiró de su cátedra en Berlín, y Cantor decidió ofrecerse de nuevo como candidato para ocupar la cátedra. En una llamativa carta a Mittag-Leffler, del 1 de enero de 1884, explica sus motivos:

> Entiende Ud. muy bien el sentido de mi solicitud; no he pensado ni de lejos en que pudiera llegar a Berlín ahora. Pero como es mi intención llegar allí, *y como sé que Schwarz y Kronecker intrigan terriblemente contra mí desde hace años*, por miedo a que pudiera alcanzarlo, he considerado que era mi deber tomar yo mismo la iniciativa y dirigirme al Ministro. *El efecto inmediato de ello lo había previsto con mucha precisión, a saber, que Kr. reaccionaría como si le hubiera picado un escorpión y lanzaría un alarido, junto con sus tropas de apoyo, que haría pensar que Berlín se había convertido en el desierto de África*, con sus leones, tigres y hienas. Realmente he logrado este efecto, a lo que parece.

El caso de Mittag-Leffler es llamativo, pero quizá típico, por la intensidad con la que se estableció una amistad y complicidad en 1882/83, y por lo pronto que quedó rota. Una vez que Mittag-Leffler le escribió su carta recomendándole aplazar la publicación del artículo 'Principios de una teoría de los tipos de orden', la herida fue demasiado grande y el declive, inevitable. Mittag-Leffler le había escrito que publicar demasiado, sin presentar resultados tangibles, podría acarrear el descrédito para sus novedosas ideas, de modo que tendrían que pasar quizá más de 100 años hasta que fueran redescubiertas. Estas palabras, reinterpretadas en el sentido de que sus ideas eran enormemente prematuras, se quedaron bien grabadas en la memoria de Cantor.

Pero el caso quizá más llamativo, por la complejidad de las actitudes y sentimientos, fue precisamente el de Dedekind. Fue el matemático que más comprensión mostró para las nuevas ideas de Cantor, cosa normal dado que él mismo contribuyó enormemente a la reorientación conjuntista de la matemática moderna. Fue la gran apuesta en la que Cantor puso sus esperanzas al intentar hacer de Halle un centro importante, en 1881. Pero fue también una persona con la que sus relaciones se enturbiaron desde 1874. En otro lugar he argumentado que probablemente la ingratitud de Cantor hacia Dedekind, en aquel momento, tuvo su origen en que el primero tenía sus esperanzas puestas en el apoyo de los berlineses, que veían con malos ojos al segundo. Además, Dedekind no era sino un humilde profesor en la Escuela Técnica de Brunswick, alguien que carecía completamente del poder de influir en la vida académica y científica, salvo por sus escritos.

Tras el distanciamiento de los matemáticos, en 1885, Cantor no sólo comenzó una extensa correspondencia con teólogos y filósofos, sino que se entregó con intensidad a defender – frente a la incredulidad de los filólogos– una tesis peregrina, pero en boga por entonces: que el canciller Bacon era el verdadero autor de los dramas de Shakespeare. Fue la llamada polémica Bacon–Shakespeare, que da prueba de los variados intereses de nuestro personaje, y constituyó una pasión duradera: Cantor invirtió una gran suma de dinero en comprar libros de la época isabelina, y al respecto publicó él mismo tres libros entre 1896 y 1897. Hay dos aspectos de especial interés en este episodio: la concepción aristocrática que pone de manifiesto, pues se pensaba que un plebeyo como el actor Shakespeare no podía dar frutos de semejante altura moral e intelectual, y la creencia en un inmenso papel histórico de los 'grandes hombres': hay motivos para pensar que Cantor se aplicó a sí mismo esta creencia.

Por eso, el inagotable torbellino que era Cantor hizo aún algo más en estos años. Harto de que el ambiente matemático alemán pudiera estar de tal modo manipulado por un grupo de poder, puso en marcha medidas para contrarrestarlo. Se necesitaba una Unión matemática que sirviera para poner freno a los poderosos, prestando apoyo y protección a la savia nueva, las ideas innovadores de jóvenes brillantes. De aquí surgió el proyecto de la Unión Matemática Alemana [*DMV*: *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*], que Cantor promovió con todas sus fuerzas y para la que encontró apoyo en poderosos emergentes como el mismo Felix Klein. Costó no poco trabajo convencer a sus colegas: aunque habían pasado más de 15 años desde la unificación bismarckiana de Alemania, la mayoría seguían acostumbrados a pensar en términos regionales o locales, y también a la influencia enorme de algunos mandarines. La idea tuvo éxito, fraguando en 1890, y Cantor fue nombrado presidente el mismo año, siendo reelegido los tres siguientes (un honor nada frecuente). El resultado contribuyó sin duda al avance de la matemática y a dar una mayor sensación de autonomía a sus cultivadores.

También decidió Cantor, por motivos similares, impulsar los congresos matemáticos internacionales, y en este sentido mantuvo de nuevo una intensa correspondencia, por ejemplo con matemáticos franceses. Pero su papel en la gestación de los Congresos Internacionales de Matemáticos celebrados en 1897 en

Zurich y 1900 en París no fue tan central, sino que quedó relegado a un segundo o tercer plano frente a la intervención de figuras como Klein.

Al fin, hacia 1894, Cantor se sintió reconciliado con la nueva situación. El desarrollo de la *DMV* se consolidaba y tomaba cuerpo; Kronecker había muerto en 1891, y aunque la universidad más importante, Berlín, estaba sólidamente en manos de los ortodoxos o conservadores, su mano ya no se extendía por todo el *Reich* como antes. Bajo el mando de Klein, Göttingen se consolidaba como nuevo centro fuerte al que ahora (en 1895) se incorporaba David Hilbert, un hombre de tendencias modernas, admirador de Dedekind y del propio Cantor, con quien éste hizo buenas migas. Todo ello le movió a publicar de nuevo en *Mathematische Annalen*, dando a la luz lo que sería su testamento matemático: una reposada presentación de sus ideas fundamentales sobre los números transfinitos (cardinales y ordinales), los tipos de orden y los conjuntos bien ordenados, bajo el título de 'Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos' (1895 y 1897).

Las *Contribuciones* de 1895 y 1897 constituyeron el testamento científico de Cantor, y fueron la fuente en que bebieron los que se convertirían en los próximos grandes impulsores de la teoría de conjuntos transfinitos: matemáticos como Ernst Zermelo en Göttingen y Felix Hausdorff en Leipzig. Eran artículos que, a diferencia de las contribuciones de *Sturm und Drang* en los años 1880, habían sido redactados con cuidado tras una larga meditación de la cuestión. Presentaban resultados clave sobre las cardinalidades, ahora bajo la figura de los cardinales transfinitos o alefs: $_0$, $_1$, … , …; sobre los tipos de orden, incluyendo el orden denso de los racionales y el orden continuo de los números reales; y sobre los números ordinales transfinitos, especialmente una teoría rigurosa de los ordinales enumerables de la segunda clase numérica. Pero en cierto sentido eran artículos decepcionantes, porque no abordaban las grandes cuestiones abiertas de la teoría cantoriana, muy en particular el problema del buen orden y la Hipótesis del Continuo (HC).

Como el lector podrá ver por las cartas a Hilbert y Dedekind de 1897 y 1899, Cantor tenía muy en mente esos grandes problemas. De hecho, su firme intención era publicar una tercera parte de las *Contribuciones* que discutiría las paradojas de la teoría de conjuntos, argumentando a partir de ellas que todo conjunto admite ser bien ordenado, y que por tanto toda cardinalidad infinita es un alef. La HC habría quedado de nuevo en el aire, pero el avance de la teoría de conjuntos hubiera sido innegable. Es de lamentar que Cantor no cumpliera su objetivo, pero hay que reconocer su capacidad de autocrítica, y es que las ideas "fundamentales" con las que respondía a las paradojas no eran suficientemente claras. Hablaremos de ello en la sección 6. Entretanto, fue Hilbert quien se encargó de recordar a la comunidad matemática cuáles eran los grandes problemas abiertos por Cantor, al discutir la HC y el problema del buen orden en su célebre conferencia de París (1900) sobre 'Problemas matemáticos'.

La dificultad definitiva que impidió esta última publicación fue un recrudecimiento de la enfermedad maníaco-depresiva de Cantor. En las últimas cartas de 1899, recogidas en traducción, podrán ustedes advertir claras señales de ello. No sabemos con certeza hasta qué punto Cantor pudo sufrir crisis importantes entre 1884 y 1899; Grattan-Guinness (1971) se inclina por pensar que no, y en todo caso parece que la actividad docente del matemático no se vio afectada. En cambio, durante el invierno de 1899 fue necesario liberarle de dar clases, y las repeticiones del problema condujeron a que fuera nombrado emérito ya en 1905. La gota que había colmado el vaso, ya muy lleno, fue la muerte de su hijo Rudolf el 16 de diciembre de 1899. Cantor entró en una severa crisis, que duró hasta muy entrado el año 1900; desde entonces hasta su muerte en 1918, pasaría largos períodos en la *Nervenklinik* de Halle.

Es interesante citar las reminiscencias del gran hombre que Meschkowski (1983, 173–174) pudo recoger de Alice, sobrina suya que pasó muchas semanas en casa de Cantor a lo largo de años:

> Mi tío permanecía enterrado en su cuarto de estudio, enormemente grande, cuyas cuatro paredes estaban todas cubiertas de libros desde el suelo hasta el techo. Allí parecía vivir su vida, para sí mismo, aislado en sus propios planetas, desconocido para el resto de nosotros. Por más que me hubiera gustado conocerle de verdad, él nunca estaba visible. En casa de mis padres pude escuchar una y otra vez comentarios que indicaban cómo mi padre (su cuñado) tenía en muy alto el carácter de mi tío, su pureza y su bondad, y cómo le impresionaba enormemente su grandeza de espíritu. Mi padre parecía divinizar a mi tío. También se hablaba de sus ausencias periódicas, durante días, del hogar propio en Halle, el cual abandonaba repentinamente y 'de su propio pie', por así decir. Luego era llevado a un Hospital y más tarde volvía a casa y todo parecía volver a tomar su camino usual; hasta la próxima vez. Me hice una imagen de sus estados de ánimo sobreexcitados, exaltados, pero no querría emitir un juicio al respecto, y en realidad no podría.

Si el Dr. Guttmann divinizaba a Cantor, el propio Georg aprendió a interpretar su enfermedad mental en clave sobrenatural. No es extraño que una persona de estas características interprete las fases maníacas como algún tipo de 'intervención' superior en la propia mente. Además, las fases altas de la enfermedad pueden haber sido una ayuda para la exploración mental de un territorio tan nuevo como el dominio de lo transfinito, lo cual intensificaría la impresión de realidad exterior en esas ideas, y de ser en cierto modo un 'enviado' para comunicarlas. Las *Contribuciones* de 1895 van encabezadas por varias citas, entre ellas el famoso "hypotheses non fingo" de Newton, y una cita en latín cuyo autor original es Bacon –de nuevo el inglés Francis Bacon–:

> Pues no damos leyes al intelecto o a las cosas a nuestro arbitrio, sino como escribas fieles las recibimos y copiamos de la voz revelada de la misma naturaleza.

Cantor, fiel escriba e intérprete de la voz revelada de Dios o la Naturaleza (recordemos a Spinoza): nada podría ser más adecuado a la interpretación realista, platónica, de sus geniales teorías que defendió el matemático.

A pesar de las graves dificultades causadas por la enfermedad, Cantor aún tuvo tiempo de participar en algunos sucesos notables. En 1904 estuvo presente en las sesiones del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Heidelberg, en el cual –como había ocurrido en los dos anteriores– la teoría de conjuntos tuvo una importante presencia. Hilbert defendió de nuevo esta teoría y el infinito actual, pese a la conciencia general del grave problema que suponían las paradojas, proponiendo una manera de fundamentar la lógica y la matemática que guarda conexiones importantes con su famoso Programa de los años 1920, basado en la *teoría de la demostración*. Sobre todo, un matemático renombrado y famoso por la precisión de sus trabajos, el húngaro G. König, prometió resolver el primero de los Problemas Matemáticos de Hilbert, presentando una detallada y muy técnica demostración de que la potencia $\mathfrak{c}$ del continuo ¡no puede ser un alef! El asunto fue tan sonado que se anularon las otras sesiones para que todos los matemáticos pudieran asistir a la exposición de König, y hay quien dice incluso que la noticia salió en la prensa y el Duque de Baden-Württemberg fue informado en persona por Felix Klein.

Según cierto matemático, Cantor tomó entonces la palabra y dio gracias a Dios por haberle permitido vivir la refutación de sus errores. La anécdota es hermosa y parecería encajar con su personalidad, pero aquel matemático no estaba presente, y los testigos presenciales nos cuentan algo distinto. Según Schoenflies, Cantor en ningún momento aceptó el resultado de König, "a pesar de sus demostraciones *exactas*"; le gustaba repetir de broma que "no sentía ninguna desconfianza hacia el Rey [König], sólo hacia su Ministro". El "König" al que se refería Cantor es, obviamente, Dios mismo, y –a diferencia de lo que sucedía en su propio caso– el matemático húngaro no era un escriba o intérprete fiable. En cierto modo tenía razón, pero –los designios de Dios son enrevesados– el intérprete poco fiable no había sido König, sino otro matemático del que aquél tomó un resultado formulado en su tesis doctoral con una generalidad excesiva: se trata de Felix Bernstein, alumno del propio Cantor que presentó su tesis en 1901 bajo la dirección de Hilbert.

Este incidente hizo que el problema del continuo y la cuestión relacionada del buen orden se convirtieran en una obsesión para los jóvenes matemáticos interesados en la teoría de conjuntos. Hausdorff dijo haber sufrido una "monomanía" por aquellos meses, pero consiguió dar con el error unos meses más tarde: König había conseguido demostrar un importante teorema (que la potencia $\mathfrak{c}$ del continuo no puede ser un alef *de cierto tipo*) pero no había echado por tierra la creencia fundamental de Cantor. También Zermelo, hombre del entorno de Hilbert, prestó toda su atención al tema, y en septiembre del mismo año redactó una carta que contenía la demostración general del Teorema del Buen Orden, empleando para ello un nuevo postulado: el Axioma de Elección. La publicación de esta carta en los *Mathematische Annalen* desató ríos de tinta, un debate internacional sobre los postulados aceptables en teoría de conjuntos que dio nueva intensidad a la llamada "crisis de fundamentos". Durante dos o tres décadas, fue habitual tratar el postulado de Elección como si fuera más hipotético que el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, e incluso hubo grandes matemáticos que se esforzaron para no emplearlo en absoluto.

En 1912 Cantor fue nombrado doctor *honoris causa* por la Universidad de St. Andrews, y consiguió realizar el viaje sin problemas, acompañado de su hija. Cumplía con esto uno de sus sueños, visitar la Gran Bretaña de la que tanto había aprendido a través de su ocupación literaria con la época isabelina, en relación a la polémica Bacon–Shakespeare. Pero fue más emotivo lo ocurrido en 1915, cuando los matemáticos de Göttingen, liderados por Hilbert, organizaron toda una celebración en la casa de los Cantor, en Halle, para festejar debidamente su 70 aniversario. Se hizo entrega de un hermoso busto de mármol, todavía situado en la Universidad de Halle, y los conmovedores discursos despertaron una gran emoción en el viejo Cantor. A menudo había dicho que los alemanes "no le conocían" a pesar de vivir y obrar entre ellos, y que sus esperanzas estaban en el extranjero. Ahora debió sentirse reconciliado. En una carta formal, redactada en nombre de toda la Sociedad Matemática de Göttingen, Carathéodory escribía en un tono apropiado para dirigirse al romántico Cantor:

> … no haríamos justicia a su obra si sólo quisiéramos juzgarla por la magnitud de su influencia o como un medio para el crecimiento de la ciencia. ¡No! Quien se ha esforzado por penetrar en su teoría, ése ha contemplado algo excelso en sí mismo, que lleva en su interior el valor inmenso que lo caracteriza.

La celebración tuvo lugar el 3 de marzo de 1915; menos de tres años después, el 6 de enero de 1918, el gran matemático moría de un fallo cardíaco.

Hilbert y su amigo Minkowski habían hecho de Cantor un héroe más o menos desde 1895, forjando la imagen de todo un campeón de la matemática moderna, víctima de la persecución del villano Kronecker, caracterizado como un tirano de cortas vistas y acciones malintencionadas. La pregnancia del Problema del Continuo creado por Cantor, su certera visión de las paradojas conjuntistas, su destino trágico de enfermo mental –que reanimaba el viejo mito de que una excesiva proximidad a la verdad se paga con la locura– y su importante papel en la creación de la Unión de Matemáticos Alemanes, todo ello contribuyó grandemente a engrandecer su figura a los ojos de Hilbert y su gente. No es casualidad que a Cantor dedicase el primero de los Problemas que expuso en 1900 en el Congreso de París: no se trataba sólo de la indudable elegancia y profundidad del Problema del Continuo, sino también de que, al colocarlo en primer lugar, Hilbert enfatizaba su apuesta –la apuesta de Göttingen– por los métodos más modernos en matemáticas. Les enviaba a los dubitativos franceses una señal inequívoca de por dónde debían ir las cosas en el futuro.

Cuando 25 años más tarde Hilbert habló, con retórica bíblica, del "paraíso de Cantor", presentándose como un Adán que se niega a ser expulsado, las poderosas imágenes de la leyenda de Cantor cumplían un gran papel en la defensa de un modo de hacer matemáticas que Hilbert veía amenazado. Un matemático cercano a Hilbert y Klein, Schoenflies, contribuía por aquellos años a afianzar la imagen del Cantor víctima del tirano Kronecker (en artículos de 1922 y 1927, este segundo publicado en *Acta Mathematica* y basado en cartas a Mittag-Leffler), y llegaba incluso a sugerir que la enfermedad maníaco-depresiva había tenido dos causas: el intenso trabajo en vano a propósito de la Hipótesis del Continuo, y la malévola enemistad de su antiguo protector en Berlín. Al emplear el mito de Cantor en los años 1920, el objetivo principal de Hilbert era evitar que los jóvenes matemáticos se fueran tras el peligroso flautista de Hamelin que era el holandés Brouwer (como lo había hecho ya el mejor discípulo de Hilbert, Hermann Weyl). Cantor y Kronecker en paralelismo con Hilbert y Weyl: la libertad de la matemática moderna frente a la reacción conservadora, casi diríamos –recordemos la retórica del paraíso, y el famoso árbol– el Bien frente al Mal.

6. Las paradojas de la teoría de conjuntos.

En la literatura especializada existe bastante confusión sobre cuándo descubrió Cantor las paradojas de la teoría de conjuntos, e incluso hay quien afirma que no descubrió tal cosa (ya que para él no eran contradicciones de la "verdadera" teoría de conjuntos). La selección de cartas de los años 1897 y 1899 que ustedes podrán leer con detenimiento debe hacer transparente el hecho de que Cantor no sólo planteó con precisión esos argumentos, sino que entendió con toda claridad que suponían una contradicción para la teoría de los conjuntos defendida por autores como Dedekind y Frege. Además, hay buenos motivos para circunscribir al año 1896 el momento en que debió encontrar las paradojas: fue sólo a comienzos de 1897 cuando las comunicó a otros matemáticos, principalmente a Dedekind y Hilbert. Ya entonces sabía Cantor que la colección de todos los ordinales transfinitos no puede ser un conjunto, pues suponerlo nos lleva a una contradicción estricta (la llamada paradoja de Burali-Forti), y que lo mismo pasa con la colección de todos los cardinales (la llamada paradoja de Cantor).

6.1. Esto no quita para que la historia del descubrimiento y la aceptación de las paradojas por la *comunidad matemática* fuera bastante complicada. Pues aunque Cantor planteó sus respectivos argumentos a Bernstein, Dedekind, Hilbert y otros, no llegó a cumplir su intención de publicarlos. Las paradojas sólo fueron publicadas y anunciadas a bombo y platillo por Bertrand Russell en su obra *The Principles of Mathematics* (1903). Conviene añadir que entre la influyente comunidad matemática de Göttingen, las paradojas eran ya bien conocidas, y que en realidad la primera indicación pública de su existencia, nada dramática y estimulada por el contacto con Cantor, tuvo lugar en artículos de Hilbert del año 1900:

> Si quisiéramos producir de un modo similar la demostración de la existencia de una colección de todas las potencias (o de todos los alefs de Cantor), este intento no alcanzaría su objetivo: de hecho la colección de todas las potencias no existe, o –según lo expresa G. Cantor– el sistema [System] de todas las potencias es un conjunto no consistente (no disponible).

La base en la que Hilbert apoyaba esta convicción no era otra que las cartas recibidas de Cantor.

Sin embargo, fue sólo en 1903 que las paradojas se convirtieron en centro de la atención internacional. A ello contribuyó sin duda la paradoja de Russell, de carácter muy elemental porque involucra sólo conceptos lógicos básicos y la relación de pertenencia, . (Se trata de la famosa contradicción de la totalidad de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos. Si suponemos que dicha totalidad es un conjunto, podremos llamarle Z = {*x: x x*}; y sabemos que los conjuntos son a su vez elementos de conjuntos, de manera que Z debe pertenecer o no pertenecer a sí mismo. Pero si Z Z, entonces –revisen los lectores la definición en la frase anterior– Z Z; por otro lado, si Z Z, entonces cae bajo la definición anterior y se deduce que Z Z. ¡Contradicción!)

Curiosamente, es algo ya bien sabido que también esta paradoja había sido anticipada por los de Göttingen y concretamente por Zermelo. Años más tarde rememoraba Hilbert que el descubrimiento de la paradoja de Zermelo–Russell "tuvo un efecto verdaderamente catastrófico en el mundo matemático"; al menos lo tuvo en Göttingen, y desde luego en él, que por algún tiempo llegó a pensar –¡terrible desengaño!– que la razón había estado siempre del lado de Kronecker.

Estas contradicciones o –como los gotinguenses gustaban de llamarlas, kantianamente – "antinomias" fueron la desesperación de la mayoría de los expertos en teoría de conjuntos, precisamente autores de la talla de Dedekind, Frege, Hilbert o Russell. Como explica el propio Cantor en sus últimos cartas, Dedekind y quienes pensaban como él basaban la teoría de conjuntos en el principio de comprehensión, que "ingenuamente" aceptaban como axioma. El principio de comprehensión dice que un concepto bien definido (un enunciado (*x*) con una variable libre, una "función proposicional" en términos de Russell) *determina* un conjunto, en el sentido de que existe el conjunto {x: (*x*)}. Ese postulado no tan ingenuo, ni mucho menos 'de sentido común', quedó tocado en la línea de flotación por las 'antinomias'. De ahí la desolación que demostraron los más reflexivos de aquellos autores: Dedekind se negó en 1903 a reeditar su librito (1888), y Frege abandonó para siempre la posición logicista que llevaba más de 20 años desarrollando y afianzando.

En cambio, nuestro especulativo personaje recibió las paradojas sin problemas, más bien con la sensación triunfal de que confirmaban las intuiciones que venía desarrollando desde 1883. Tan sin problemas, que enseguida buscó la manera de obtener rendimientos propiamente matemáticos a partir de ellas: concretamente, un intento de demostración del teorema del Buen Orden, muy sugerente aunque no del todo satisfactorio.

6.2. La explicación de esa diferencia entre Cantor y los otros es que la concepción de la teoría de conjuntos presentada en las anotaciones a los *Fundamentos*, y concretamente los lazos que había establecido entre la matemática por un lado, y la metafísica y la teología por otro, hacían admisible para él lo que era inaudito e intolerable para sus colegas. Ya hemos visto que en la anotación 2 establecía una analogía entre las totalidades absolutamente infinitas, como la de todos los ordinales, y nada menos que la divinidad. Resultado de esta analogía es que ninguno de esos 'conceptos' debía considerarse accesible al conocimiento humano. El descubrimiento de las antinomias aportaba algo más, la imposibilidad de concebir esos infinitos absolutos como un subgénero del infinito actual. Pero, de todos modos, Cantor disponía de un marco de ideas previo que le permitió reaccionar con naturalidad ante lo que eran contradicciones estrictas, pruebas de contradictoriedad, respecto a otros enfoques.

En una carta a Hilbert de 1897, Cantor afirmaba que ya "hace muchos años" había hecho referencia a esas "totalidades" que no pueden ser consideradas como conjuntos, al hablar de totalidades "absolutamente infinitas". En años recientes, varios autores han ofrecido argumentos en el sentido de que, efectivamente, Cantor había previsto las antinomias *ya* en el momento de redactar los *Grundlagen*. La reconstrucción más convincente es la de Tait, ya que utiliza sólo ideas presentes en los *Fundamentos* para montar una paradoja. Si la colección O de todos los ordinales fuera un conjunto, no tendría un último elemento, y el segundo principio de generación nos autorizaría a hablar de un siguiente número ordinal o. Según esto, o es mayor que todos los ordinales de O, pero a la vez es uno de ellos (porque O es el conjunto de *todos* los ordinales), de manera que $o > o$; y entonces tendríamos una sucesión descendente infinita de ordinales:

$$o > o > o > \ldots,$$

en contradicción con el segundo teorema del § 13 de los *Fundamentos*.

Desde mi punto de vista, sin embargo, todas esas interpretaciones son demasiado optimistas: se basan en evidencia sumamente escasa y discutible, acompañada de interpretaciones sin garantías. Ese teorema del § 13 viene formulado sólo para ordinales de la segunda clase, y no es en absoluto evidente que Cantor se hubiera convencido ya de que es válido para números transfinitos con plena generalidad. Pero hay algo peor. La antinomia planteada por Tait hubiera inmediatamente arrojado dudas sobre la idea que expresa el segundo principio de generación, el cual interviene críticamente al obtenerla: *no podemos* crear un nuevo número siempre que tengamos delante una "sucesión" de ordinales sin último término. Visto esto, y la necesidad de buscar alguna cláusula restrictiva para el segundo principio, Cantor habría encontrado motivos para detener la publicación de los *Fundamentos*.

Por otro lado, si Cantor tenía las antinomias a su disposición en los años 1880, resulta muy raro que no las mencione en ninguna de sus cartas o artículos filosóficos. Más bien, algún escrito sugiere que aún en 1888 no las conocía: en carta a Vivanti de ese año, Cantor habla del libro de Dedekind (1888) sin criticar su tendencia "a fundamentar la aritmética de manera puramente lógica", sino considerándola "loable". Esto resulta interesante por contraste con su apreciación de las cosas diez años más tarde: en la carta a Hilbert de noviembre de 1899, Cantor formula con gran clarividencia el carácter de contradicción que las paradojas tienen para la teoría "lógica" de Dedekind, insiste en la "*oposición diametral*" que hay entre dicho planteamiento y el del propio Cantor, y sugiere que reconoció el error de Dedekind "inmediatamente después" de la publicación de su libro. Pero este tipo de implicaciones y aclaraciones no se encuentran en ninguno de sus escritos antes de 1896, y de hecho el enfoque ofrecido en los *Grundlagen* de 1883 parece ser todavía el de una teoría "lógica" de conjuntos.

En su reminiscencia de 1897, Cantor no llega a afirmar que catorce años antes tuviera a su disposición los *argumentos* de las antinomias. Más bien, el argumento que dio en los *Fundamentos* acerca del carácter absoluto de la colección de los ordinales parece *refutar* la idea de que conociera las paradojas. Dice en la anotación 2 que "a cada número suprafinito de cualquiera de las clases numéricas superiores (II), (III), etc., por grande que sea, le sigue una colección de números y clases numéricas que en lo relativo a potencia no se ve reducido en lo más mínimo, comparada con la totalidad de la colección absolutamente infinita de números comenzando por 1". Tait (2000) reconoce que este razonamiento "ultimately makes no sense", y es que, si hubiera captado las antinomias, habría debido comprender que no tiene sentido hablar de la "potencia" del "conjunto" de todos los ordinales mayores que , o que otro ordinal cualquiera, ni compararla con la "potencia" del "conjunto" absolutamente infinito de todos ellos.

En un análisis sumamente detallado de las múltiples manifestaciones de Cantor –en cartas y artículos de todo el período– con respecto a lo transfinito y lo Absoluto, Jané (1995) llega a la conclusión de que su posición cambió en un matiz clave hacia 1896. Antes de esa fecha, Cantor concibe lo Absoluto como un infinito *actual*, un dominio real de magnitud o potencia máxima (coherentemente con lo que acabamos de ver en el párrafo anterior). Después, pasa a entender lo Absoluto como algo *irremediablemente potencial*, abierto e incompletable. Esto constituye buena evidencia independiente de que fue hacia 1896 cuando encontró las antinomias. Por si hiciera falta más evidencia, en el artículo de 1892 que ustedes pueden leer, se dice que en los Fundamentos de 1883 había demostrado "que la colección de todas las potencias, si las imaginamos ordenadas conforme a su tamaño, forman un «conjunto bien ordenado»". Una idea absurda, propia de algún "ingenuo" partidario de la teoría lógica de conjuntos.

Tanto en 1883 como en 1897 pensaba Cantor que lo absolutamente infinito no es determinable matemáticamente, pero sus razones iniciales eran sólo teológicas, mientras que las finales son *también matemáticas*. Por insistir una vez más: las tesis recogidas en sus anotaciones a *Fundamentos* ofrecieron a Cantor un punto de apoyo para reaccionar frente a las paradojas y motivos para agradecerlas, pero eso no quiere decir que ya entonces las conociera. La evidencia conservada en cartas y documentos se empeña en sugerir que fue sólo hacia 1896 cuando se hizo consciente de esas tensiones bajo la forma concreta de las paradojas.

6.3. En una carta a Mittag-Leffler de mayo de 1883, hablando del teorema de Cantor–Bernstein (y de cómo lo había formulado ya en 1878), decía nuestro hombre:

> Al escribirlo en aquel momento, estaba convencido de su corrección gracias a una especie de intuición indescriptible [eine Art von unbeschreiblicher Intuition], aunque sabía muy bien que el teorema requería una demostración; mas durante años he sido incapaz de encontrar esa demostración. Sólo desde que he descubierto y encontrado los números suprafinitos, desde que he podido definir las potencias sucesivamente crecientes, que se dan en la naturaleza, estoy en posesión de la demostración.

Si hubo alguna anticipación de las antinomias en los *Fundamentos*, parece que fue más bien, en palabras de Cantor, "una especie de intuición indescriptible".

Pero hay algo que debe quedar claro, tras la anterior discusión. Al introducir los números ordinales transfinitos, siquiera a un nivel intuitivo, Cantor disponía de un nuevo dominio donde aplicar, desarrollar y explorar sus ideas conjuntistas. Este nuevo dominio, con su carácter abierto y radicalmente maximizador, tenía el potencial de generar graves tensiones dentro de la teoría de conjuntos. Hasta entonces Cantor sólo podía pensar en conjuntos de números o de puntos o de funciones; pero al investigar los ordinales acabaría haciéndose patente la necesidad de imponer restricciones en teoría de conjuntos, so pena de caer en contradicción.

Además, las anotaciones a los *Fundamentos* muestran con claridad que, tras haber escrito el texto principal de este escrito, Cantor comenzó a alejarse de manera irreparable de la visión "lógica" de los conjuntos, andando el camino hacia la concepción plenamente realista o platónica que pasó a convertirse en "el fundamento de su investigación conjuntista" (según dice en la citada carta a Hilbert). La teoría de conjuntos no podía basarse en ningún principio meramente lógico acerca de los conceptos o predicados como base para la formación de conjuntos (el principio de comprehensión). La teoría de conjuntos era algo mucho más elevado, y su base última estaba en la verdadera metafísica y teología, que sigue la tradición de Platón, Leibniz y Spinoza.

Me gustaría terminar citando las palabras con las que Bernstein aclaró a los editores de las obras de Dedekind cómo transcurrió la visita que hizo a éste, por Pentecostés del año 1897 (véase la carta de Dedekind, 29.08.1899):

> La mencionada visita fue motivada por Cantor. Este había encontrado poco antes la paradoja del conjunto [*sic*] de todos los números ordinales, concretamente al intentar demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado –demostración que intentaba llevar a cabo con reflexiones algo similares a las que Zermelo empleó posteriormente, sólo que evitando los conjuntos inconsistentes, en su primera demostración del Buen Orden [1904]–. Cantor entendió perfectamente que la paradoja que había encontrado también se aplica al conjunto [*sic*] de todas las cosas. Dedekind había utilizado éste en su escrito '¿Qué son y para qué sirven los números?' para demostrar la existencia de conjuntos infinitos, y de tal manera que, según el desarrollo de su escrito, la definición de los números depende de la existencia no contradictoria de esos conjuntos. Cantor le había pedido ya por carta una toma de posición al respecto, y, como ésta no llegaba, probablemente a causa de la severa enfermedad que Dedekind padeció en el invierno de 1896/97, ahora me encargaba de dar lugar a ella tratando el asunto de palabra.
>
> Sin embargo, Dedekind no había llegado entonces a una toma de posición definitiva, y me confesó que en sus reflexiones había llegado casi a dudar si el pensamiento humano es plenamente racional.

Palabras ciertamente llamativas en alguien tan ponderado y comedido como el matemático de Brunswick... Pero el informe de Bernstein no termina aquí; las palabras finales son especialmente interesantes en el contexto de la biografía de

Cantor:

> El episodio siguiente debería ser de especial interés: respecto al concepto de conjunto, Dedekind me manifestó que se imaginaba un conjunto como un saco cerrado, que contiene cosas completamente determinadas, pero de modo que uno no las ve, y no sabe nada de ellas salvo que existen y están bien determinadas. Algún tiempo después Cantor dio a conocer su manera de imaginarse un conjunto: elevó bien alta su colosal figura, describió con el brazo extendido un gesto magnífico, y dijo con una mirada dirigida a lo indeterminado: 'Me imagino un conjunto como un abismo'.

7. Nota sobre la traducción.

Los textos publicados por el propio Cantor se han tomado de sus *Gesammelte Abhandlungen*, editados por Zermelo en 1932, cotejados siempre que ha sido posible con las versiones originales de los artículos (especialmente empleando Cantor 1984). En cuanto a las cartas, provienen de las siguientes obras: los *Abhandlungen*; el *Cantor–Dedekind Briefwechsel* editado por Noether y Cavaillès (1937), que se ha complementado con la obra de Dugac, *R. Dedekind et les fondements des mathématiques* (1976); el libro *Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung*, de Meschkowski (1983) y el de Purkert e Ilgauds (1987), *Georg Cantor 1845–1918*; y finalmente, la copiosa –pero no completa– selección de cartas editada por Meschkowski y Nilson, *Georg Cantor: Briefe* (1991).

Conviene comentar ciertos puntos tocantes a cuestiones terminológicas y de estilo en la traducción que ofrecemos. Son bien conocidas las dificultades de traducción que ofrece el alemán, y particularmente cuando es de carácter filosófico. Nuestra versión ha huido intencionadamente de ser 'germanizante', tratando de ofrecer en un castellano tan armonioso como hemos podido las ideas del autor. Se ha intentado siempre recoger las matizaciones y los énfasis del original, pero no se ha buscado una literalidad total. A quien desee realizar un análisis detallado o filológico de los textos, lo remitimos, como no podía ser menos, al original alemán.

Con lo que acabo de decir está muy relacionada la actitud que hemos adoptado ante la traducción de algunos términos importantes y/o difíciles. Me referiré sobre todo al caso de los *Grundlagen*. En aquellos casos en los que el uso terminológico responde a una tradición en la obra del propio Cantor, se ha intentado ser fiel al original. Por el contrario, cuando se trata de un uso ocasional, presente sólo en los *Fundamentos*, y especialmente si resultaba difícil encontrar una traducción adecuada, nos hemos sentido libres de buscar una solución adecuada a nuestro idioma.

Todos los estudiosos de los *Grundlagen* se tropiezan con el incómodo término 'Anzahl'. Cantor le da el sentido técnico de número ordinal –curiosamente, por las fechas en que Frege le daba el sentido opuesto de cardinal–, aunque a menudo lo emplea en el sentido usual de cantidad, número. La versión al castellano es difícil, sobre todo teniendo en cuenta los derivados del término, y aquí nos hemos decantado por "enumeración". Algunos autores anglosajones dejan el término sin traducir, pero nos ha parecido que esto no se justifica por la importancia de su empleo ni por su impacto en la interpretación del texto.

Otro caso incómodo es, curiosamente, el uso del adjetivo 'real' en 'reale ganze Zahl'. No se puede traducir por "número real entero" porque la palabra 'real' tiene un uso perfectamente establecido en matemática. Cantor salvaba este escollo porque número real se dice en alemán 'reelle Zahl', distinguiéndose entre 'reell' y 'real'. Ya que no se puede hacer un juego de palabras similar en castellano, hemos optado por traducir 'real' como "verdadero": nuestro autor dice que los transfinitos son "verdaderos números enteros", tan *reales* como 1, 2 o 3.

En dos casos importantes nos hemos permitido simplificar. Para hablar de aplicaciones biunívocas, Cantor emplea una expresión compleja, diciendo que dos conjuntos pueden ser coordinados uno con otro "unívocamente de modo recíproco [gegenseitig eindeutig], elemento a elemento". Nos ha parecido que no se perdía nada al modernizar su lenguaje ligeramente y traducir "biunívocamente", ya que el concepto aparece en su obra con toda nitidez. Por otro lado, hemos traducido 'Theil', no por el equívoco "parte", sino por el más preciso "subconjunto". Seguramente sabe el lector que las distinciones explícitas respecto a esa noción, como a propósito de pertenencia e inclusión, se deben a Peano y Frege.

En cambio, consideraciones acerca de la importancia y tradición del término en Cantor aconsejaban ser literal con la palabra 'Mächtigkeit', traducida como "potencia". Quizá hubiera sido más fácil para el lector actual haberla traducido por "cardinalidad", ya que estamos hablando del término para referirse a la cardinalidad de un conjunto; pero en todo caso resulta sencillo acostumbrarse al cambio. Sabemos que el término fue adaptado a partir de escritos de Steiner sobre geometría, pero quizá no fueran ajenas a la decisión de Cantor las reminiscencias teológicas de la palabra: la omnipotencia divina se dice 'allmächtigkeit'.

Finalmente, hay que decir unas palabras sobre 'Menge' y 'Mannigfaltigkeit'. Durante los años 1880, Cantor se refería a la teoría de conjuntos empleando el término –inspirado en Riemann– ‘Mannigfaltigkeitslehre’. A la vez, como escribir ‘Mannigfaltigkeit’ se hacía largo y tedioso, hablaba frecuentemente de ‘Mengen’ de puntos o de números, y esta última palabra es la que acabó imponiéndose en lengua alemana. Lo literal hubiera sido distinguir entre “variedad” (Mannigfaltigkeit) y “conjunto” (Menge), pero nos ha parecido innecesario mantener esta distinción. Máxime cuando se debe a dificultades de buscar terminología en la lengua alemana, que ni Cantor ni Dedekind sentían al pasar a lenguas romances. Solo en algún lugar aislado, donde resultaba particularmente adecuado, y por recordar al lector que el uso lingüístico de Cantor y otros seguía en estado de flujo, hemos mantenido la expresión “teoría de variedades”.

6. Bibliografía.

Reinhard BÖLLING. 1997. Georg Cantor – Ausgewählte Aspekte seiner Biographie, *Jahresber. der DMV* **99**, 49–82.

Georg CANTOR. *Abhandlungen*: *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, ed. E. Zermelo, Berlin, Springer, 1932.

— *Briefe*: *Georg Cantor: Briefe*, ed. H. Meschkowski y W. Nilson, Berlin, Springer, 1991.

— 1874. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **77**. En *Abhandlungen*, 115–18.

1878. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **84**. En *Abhandlungen*, 119–33.

1879/84. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* **15** (1879), **17** (1880), **20** (1882), **21** (1883), **23** (1884). En *Abhandlungen*, 139–244.

1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, Teubner. En *Abhandlungen*, 165–208 (sin prefacio).

1892. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **1**. En *Abhandlungen*, 278–80.

1895/97. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen* **46** (1895) y **49** (1897). En *Abhandlungen*, 282–351.

— 1915. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Chicago y Londres, Open Court. Reimpreso en Nueva York, Dover, 1955.

— 1984. *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten: Arbeiten zur Mengenlehre aus den*

Jahren 1872–1884, facsímil ed. por G. Asser, Leipzig, Teubner.

Joseph DAUBEN. 1979. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Harvard University Press.

Richard DEDEKIND. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, Vieweg (3ª ed. 1911). Edición española de J. Ferreirós en Madrid, Alianza, 1998.

Paul DUGAC. 1976. *R. Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris, Vrin.

José Ferreirós. 1993. On the Relations between Cantor and Dedekind, *Historia Mathematica* **20** (1993), 343-363.

— 1995. «What Fermented in Me for Years»: Cantor's Discovery of Transfinite Numbers, *Historia Mathematica* **22**, 33–42.

— 1999. *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel Boston, Birkhäuser.

— 2003. Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura, en J. Montesinos *et al.*, *Ciencia y Romanticismo* (Fundación Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife, 2003).

— 2004. The Motives Behind Cantor's Set Theory: Physical, biological and philosophical questions. *Science in Context* 17, nº 1/2 (2004), 1-35.

— 2004a. Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904, *La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas* **7**, nº 2 (2004), 449–467.

Abraham FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL y A. LEVY. 1973. *Foundations of set theory*, Amsterdam, North-Holland.

Alejandro Garciadiego. 1992. *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Madrid, Alianza.

Ivor GRATTAN-GUINNESS. 1970. An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung, *Acta Mathematica* **124**, 65–107.

— 1971. Towards a Biography of Georg Cantor, *Annals of Science* **27**, 345–391.

Ignacio JANÉ. 1995. The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set, *Erkenntnis* **42**, 375–402.

Shaughan LAVINE. 1994. *Understanding the Infinite*, Harvard university Press.

Herbert MESCHKOWSKI. 1981. 'Cantor, Georg', en C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 2, 52–58.

— 1983. *Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung*, Mannheim, Bibliographisches Institut.

Gregory H. MOORE. 1989. Towards a History of Cantor's Continuum Problem, en D. Rowe y J.

McCleary, eds., *The History of Modern Mathematics Vol. I* (Boston/London, Academic Press, 1989), 79–121.

Gregory H. MOORE y A. GARCIADIEGO. 1981. Burali-Forti's Paradox: A reappraisal of its origins, *Historia Mathematica* **8**, 319–50.

Emmy NOETHER y J. CAVAILLÈS, eds. *Cantor–Dedekind Briefwechsel*, Paris, Hermann, 1937.

Walter PURKERT. 1986. Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre, *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique* **38**, 313–27.

Walter PURKERT y H.J. ILGAUDS. 1987. *Georg Cantor 1845–1918*, Basel/Boston, Birkhäuser.

William TAIT. 2000. Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory, en G. Sher y R. Tieszen, eds. *Between Logic and Intuition: Essays in honor of Ch. Parsons*, Cambridge Univ. Press, 2000, p. 269–90.