Le paradoxe des deux enveloppes et le choix de l'indifférence

Paul Franceschi
Université de Corse
avril 2007
p.franceschi@univ-corse.fr
http://www.univ-corse.fr/~franceschi

ABSTRACT. I present in this paper a solution to the Two-Envelope Paradox. I begin with stating the paradox and describing some related experiments. I justify then the fact that choosing either envelope is indifferent. I also point out the flaw in the reasoning inherent to the two-envelope paradox.

1. Le paradoxe des deux enveloppes

Le *paradoxe des deux enveloppes* (Jackson, Menzies, & Oppy 1994, Broome 1995, McGrew, Shier & Silverstein 1997) s'énonce de la façon suivante : devant vous se trouvent deux enveloppes qui contiennent chacune une somme d'argent. De manière certaine, vous savez que l'une d'entre elles contient le double de l'autre. Vous prenez l'une des deux enveloppes au hasard. Maintenant, vous avez le choix entre garder l'enveloppe que vous avez en main, ou bien échanger avec l'autre enveloppe. Que décidez-vous de faire ? Vous vous attachez à calculer l'espérance de gain qui est associée à l'échange des deux enveloppes. Vous raisonnez ainsi : soit n la somme contenue dans l'enveloppe que vous avez entre les mains. L'autre enveloppe contient donc une somme qui est égale soit à $2n$, soit à $1/2n$. Ces deux situations sont équiprobables et chacune d'elles peut se voir attribuer une probabilité de 1/2. Par conséquent, l'espérance de gain se calcule ainsi : $2n*1/2 + 1/2n*1/2 = 5/4n = 1{,}25n$. Ainsi, il s'avère que l'autre enveloppe contient une somme qui est d'un quart supérieure à celle que vous avez dans les mains. Par conséquent, vous avez intérêt à échanger avec l'autre enveloppe. Cependant, une fois l'enveloppe échangée, un raisonnement de même nature vous conduit à échanger à nouveau l'enveloppe, et ainsi de suite *ad infinitum*. Cela apparaît tout à fait absurde

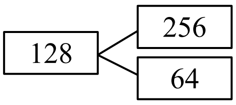
Dans la variation du paradoxe qui vient d'être exposée, on ne connaît pas le montant contenu dans l'enveloppe. Cependant, il existe une autre variante du paradoxe où l'on ouvre l'enveloppe et on connaît donc son contenu. Ces deux variantes conduisent toutefois au même résultat, car au lieu de raisonner sur n, on raisonne alors sur une valeur numérique donnée.

2. Discussion

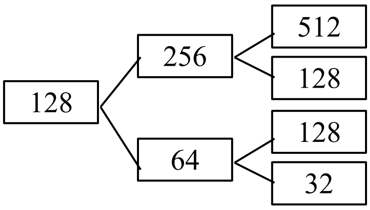
Avant d'exposer en détail la présente solution, il convient tout d'abord de s'attacher à décrire plusieurs situations probabilistes liées au paradoxe des deux enveloppes. Commençons tout d'abord par le jeu du quitte ou double. Dans une telle situation, on lance une pièce équilibrée en misant une somme quelconque n. Si la pièce tombe sur pile, on gagne le double de ce que l'on a misé. En revanche, si la pièce tombe sur face, on perd toute la mise initiale. Dans le jeu du quitte ou double, on calcule l'espérance de gain de la manière suivante : $2n*1/2 + 0*1/2 = n$. Par conséquent, il n'y a pas d'intérêt à jouer à ce jeu sur le long terme.

Considérons maintenant la variante suivante du jeu du quitte ou double. Celle-ci est identique en tous points au jeu du quitte ou double, sauf en ce qui concerne le cas où la pièce tombe sur face : dans ce dernier cas en effet, on ne perd que la moitié de la mise (alors que l'on perd la totalité de la mise dans le jeu du quitte ou double original). Dans ce cas, l'espérance de gain se calcule ainsi : $2n*1/2 + n/2*1/2 = n + 1/4n = 5/4n = 1{,}25n$. Ainsi, à la différence du jeu du quitte ou double, il y a intérêt à jouer à ce jeu sur le long terme.

Intéressons-nous maintenant au jeu suivant, que nous dénommerons 2-ENV^{+}. On tire, de manière aléatoire, une séquence de deux puissances de 2 consécutives. Le premier nombre est placé dans l'enveloppe A et le second nombre est placé dans l'enveloppe B. Supposons, pour fixer les idées, que le premier nombre de la séquence, placé dans l'enveloppe A, soit 128. Dans ce cas, les deux séquences possibles sont : {**128**, 256} et {**128**, 64}. Connaissant le premier nombre de la séquence (128, dans notre exemple), nous pouvons maintenant calculer l'espérance de gain associée au tirage du nombre suivant dans 2-ENV^{+}. La probabilité de tirer 256 ou 64 étant égale à 1/2, on calcule ainsi l'espérance de gain dans 2-ENV^{+} : $2n*1/2 + n/2*1/2 = n + 1/4n = 5/4n = 1{,}25n$. Ainsi, notre mise étant le premier nombre de la séquence (dans notre exemple, 128) et le gain correspondant étant le second nombre, nous avons intérêt à jouer à 2-ENV^{+}.



Pour fixer les idées, on peut considérer également 3-ENV^{+}. Dans ce cas, on tire, de manière aléatoire, une séquence de trois puissances de 2 consécutives. La séquence est ordonnée de telle manière que deux nombres consécutifs soient toujours le double l'un de l'autre. Je tire 128. Le gain est constitué ici par le 2ème successeur de 128. Dans ce cas, on a les séquences possibles suivantes : {**128**, 256, 512}, {**128**, 256, 128}, {**128**, 64, 128}, {**128**, 64, 32}. Ici, nous ne sommes pas intéressés par le tirage du nombre qui suit immédiatement 128, mais par le second nombre qui lui succède. Dans ce cas, l'espérance de gain se calcule ainsi : $4n*1/4 + n*1/4 + n*1/4 + n/4*1/4 = 25/16$. Soit une espérance de gain égale à 1,56. Là aussi, on a intérêt à jouer à 3-ENV^{+}.



On peut concevoir également une généralisation de 2-ENV^{+} et de 3-ENV^{+}, qui peut être dénotée par n-ENV^{+}. Dans ce contexte, une séquence de 5-ENV^{+} est par exemple la suivante : {128, 256, 512, 256, 512}.

À ce stade, il est utile de considérer également une variante du problème précédent, qui est en tous points identique à n-ENV^{+}, mais qui procède de manière rétrograde. Appelons ce problème, de manière générale, n-ENV^{-}. Considérons maintenant l'instance de n-ENV^{-} qui porte sur deux nombres : 2-ENV^{-}. Cette variante est en tous points identique à 2-ENV^{+}, sauf que l'on ne connaît dans 2-ENV^{-} que le second nombre de la séquence (alors que nous connaissons le premier nombre dans 2-ENV^{+}). Soit 128 ce second nombre. Là, il apparaît que les deux séquences possibles sont : {256, **128**} et {64, **128**}. La probabilité de tirer 256 ou 64 est encore égale ici à 1/2. Supposons maintenant que notre mise soit le second nombre (128, dans notre exemple), et que notre gain soit le premier nombre. Nous calculons alors l'espérance de gain associée au tirage du premier nombre dans 2-ENV^{-}, de même que précédemment : $2n*1/2 + n/2*1/2 = n + 1/4n = 5/4n = 1{,}25n$. On a donc également intérêt à jouer à 2-ENV^{-}.

Les remarques précédentes conduisent à mettre en évidence une propriété de réversibilité diachronique qui est inhérente à l'espérance de gain associée à 2-ENV^{+} et 2-ENV^{-}. En effet, le sens diachronique se révèle indifférent dans le calcul de l'espérance de gain associée. Ainsi, le fait de raisonner dans la séquence par rapport au nombre *suivant* (dans 2-ENV^{+}) ou par rapport au nombre *précédent* (dans 2-ENV^{-}), se révèle indifférent. Ceci résulte du fait que pour calculer l'espérance de gain, on construit le même arbre des combinaisons. Ce dernier déterminant le calcul de l'espérance de gain, le résultat s'avère finalement identique. Dans les deux cas, on a intérêt à jouer, c'est-à-dire à choisir le nombre suivant (dans 2-ENV^{+}) ou précédent (2-ENV^{-}) dans la séquence plutôt que de conserver le nombre actuel.

Supposons maintenant qu'une expérience du type de 2-ENV^{+} nous soit proposée, mais avec la clause supplémentaire suivante : notre mise est constituée par l'un des deux nombres de la séquence (par exemple 128), qui est donc soit le premier soit le second de la séquence. Appelons 2-ENV une telle expérience. Notre gain éventuel est constitué par l'autre nombre, si nous choisissons de le tirer. Compte tenu de ce qui précède, il apparaît clair que si notre nombre est le premier de la séquence, nous nous trouvons alors dans la situation de 2-ENV^{+}. En revanche, si notre nombre est le second de la séquence, nous sommes alors dans la situation de 2-ENV^{-}. Nous raisonnons alors : que je sois dans la situation de 2-ENV$^+$ ou de 2-ENV$^-$, l'espérance de gain est égale à 1,25. Par conséquent, prendre l'autre nombre est indifférent.

3. Solution

Ce qui précède permet désormais de formuler une solution pour le paradoxe des deux enveloppes. En effet, le raisonnement qui consiste à déterminer l'espérance de gain - soit 1,25 - qui résulte de l'échange de l'enveloppe A contre l'enveloppe B et d'en conclure qu'il est avantageux de réaliser cet échange, apparaît fallacieux. Nous pouvons formaliser ainsi les étapes de ce raisonnement :

(a) considérer une possibilité tactique: échanger A contre B
(b) calculer l'espérance de gain associée à l'échange A contre B: 1,25
(c) *conclure* qu'il faut échanger A contre B
(d) considérer une autre possibilité tactique: échanger B contre A
(e) calculer l'espérance de gain associée à l'échange B contre A: 1,25
(c) en conclure qu'il faut échanger B contre A
(g) en conclure que cela peut être répété ad infinitum et que cela est absurde

En effet, l'énoncé du paradoxe incite à focaliser sur l'échange de l'enveloppe A contre l'enveloppe B. C'est en effet ce que fait le raisonnement précédent, qui considère la seule éventualité d'une possibilité tactique (échanger A contre B) et en tire la conclusion qu'il s'agit du meilleur choix, parce que l'espérance de gain associée est supérieure à 1. Dans le raisonnement qui conduit au paradoxe, on ne considère l'autre possibilité tactique (échange l'enveloppe B contre l'enveloppe A) qu'*après* avoir conclu que la première possibilité tactique était le bon choix. En réalité, compte tenu du fait que nous sommes décidés à prendre également en compte la seconde possibilité d'échange offerte, il convient de procéder différemment : il s'agit de prendre en compte toutes les possibilités qui sont offertes *dès le début*, d'en faire la synthèse, puis de tirer les conclusions. Un tel diagnostic nous rappelle la solution préconisée par Quine (1953, p. 65) pour le paradoxe de l'examen-surprise: "It is notable that K acquiesces in the conclusion (wrong, according to the fable of the Thursday hanging) that the decree will not be fulfilled. If this is a conclusion which he is prepared to accept (though wrongly) in the end as a certainty, it is an alternative which he should have been prepared to take into consideration from the beginning as a possibility". À ce stade, nous sommes en mesure de reconstituer ce qu'aurait dû être le raisonnement correct :

(a') considérer une première possibilité tactique: échanger A contre B
(b') calculer l'espérance de gain associée à l'échange A-B: 1,25
(c') considérer une seconde possibilité tactique: échanger B contre A
(d') calculer l'espérance de gain associée à l'échange B-A: 1,25
(e') en conclure qu'il est indifférent de faire l'un ou l'autre échange

On le voit, le fait de calculer que les espérances de gain associées à chacun des échanges possibles sont égales *avant* de formuler une conclusion, conduit à la conclusion qu'échanger les enveloppes est *indifférent*.

Finalement, ce qui engendre l'erreur de raisonnement, c'est de considérer hâtivement, par une conclusion prématurée, qu'une espérance de gain de 1,25 associée à la première option envisagée rend nécessaire d'échanger. Mais le fait de considérer l'autre option, pour laquelle l'espérance de gain est identique, conduit à une conclusion différente. Dans la plupart des situations probabilistes, le fait de calculer une espérance de gain supérieure à 1 associée à une option conduit à désigner cette option comme étant le choix optimal. Mais dans certaines situations probabilistes, telles que 2-ENV, 3-ENV et plus généralement *n*-ENV, ce n'est pas le cas, car on peut avoir des espérances de gain supérieures à 1 qui sont associées à *plusieurs* options. Tel n'est pas le cas habituellement, et c'est bien là ce qui, dans la formulation originale du paradoxe, parvient à tromper notre intuition.

Références

Broome, J. (1995) The two-envelope paradox. *Analysis*, 55: 6–11

Jackson, F., Menzies, P. & Oppy, G. (1994) The Two Envelope « Paradox », *Analysis*, 54, 43-45
McGrew, T., Shier, D. & Silverstein, H. (1997) The Two-Envelope Paradox Resolved, *Analysis*, 57, 28-33
Priest, G. & Restall, G. (2003) Envelopes and Indifference, *unpublished manuscript*, http://consequently.org/papers/envelopes.pdf
Quine, W.V.O. (1953) On a So-called Paradox, *Mind* 62: 65-66