PRINCIPIA 27(3): 539–607 (2023) doi: 10.5007/1808-1711.2023.e91732
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

UN ACERCAMIENTO A LAS SEMÁNTICAS NMATRICIALES BASADAS EN *QST*

AN APPROACH TO *QST*-BASED NMATRICES SEMANTICS

JUAN PABLO JORGE
Universidad de Buenos Aires y Universidad Austral ARGENTINA
jorgejpablo@gmail.com

FEDERICO HOLIK
Instituto de Física La Plata, ARGENTINA
olentiev2@gmail.com

DÉCIO KRAUSE
CNPq y Universidad Federal de Rio de Janeiro, BRASIL
deciokrause@gmail.com

Abstract. This paper introduces the theory QST of quasets as a formal basis for the Nmatrices. The main aim is to construct a system of Nmatrices by substituting standard sets by quasets. Since QST is a conservative extension of ZFA (the Zermelo-Fraenkel set theory with Atoms), it is possible to obtain generalized Nmatrices ($\mathscr{Q}$-Nmatrices). Since the original formulation of QST is not completely adequate for the developments we advance here, some possible amendments to the theory are also considered. One of the most interesting traits of such an extension is the existence of complementary quasets which admit elements with undetermined membership. Such elements can be interpreted as quantum systems in superposed states. We also present a relationship of QST with the theory of Rough Sets RST, which grants the existence of models for QST formed by rough sets. Some consequences of the given formalism for the relation of logical consequence are also analysed.

Keywords: Nmatrices • quasets • rough sets • quantum logic • ZFA

RECEIVED: 09/11/2022 REVISED: 02/06/2023 ACCEPTED: 19/08/2023

1. Introducción

El formalismo lógico basado en semánticas no deterministas de Nmatrices, creado por A. Avron, I. Lev, A. Zamansky (Avron y Konikowska 2004, Avron y Zamansky 2005, Avron y Lev 2005), entre otros, se ha convertido en un activo campo de investigación en la actualidad. También ha encontrado aplicaciones en diversas áreas, tales como lógicas modales, inteligencia artificial, teoría de autómatas, la Teoría de Rough Sets y las lógicas cuánticas (Avron y Konikowska 2004, Jorge y Holik 2020). Su indeterminismo característico entra en juego a través de la condición que impone a sus valuaciones, las cuales se basan en la noción de pertenencia con respecto a los conjuntos de interpretación de los conectivos del lenguaje. Esto es, las valuaciones legales deben pertenecer a ciertos conjuntos (asociados con sus conectivos) y, cuando estos conjuntos no son singuletes, la pertenencia no determina a las valuaciones tan fuertemente como para que se satisfaga la condición de veritativo funcionalidad. Es importante tener en cuenta que los conjuntos utilizados en la formulación usual son los del universo de ZF (o ZFC) y, por ello, la pertenencia tiene el comportamiento estándar de dicho formalismo. *El objetivo central de este trabajo consiste en explorar las diferentes posibilidades y problemas que surgen en el formalismo de Nmatrices cuando se reemplaza la teoría estándar de conjuntos, ZF o ZFC, por otras teorías no estándar, tales como QST* (Quaset Theory) (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993, Dalla Chiara et al. 1998) o RST (Rough Sets Theory) (Pawlak 1982; 1986; 1987).

Hay que destacar que algunas de las *posibilidades y problemas* que serán exploradas podrían quedar también de manifiesto si utilizáramos una semántica estándar matricial (determinista) [1]. Dejando de lado el hecho de que el marco Nmatricial puede ser entendido como una generalización de las semánticas matriciales, hay dos razones para elegir trabajar dentro del formalismo de las semánticas indeterministas de Nmatrices:

- En trabajos recientes en el área (Jorge y Holik 2019; 2022; 2023), se han estudiado las proposiciones asociadas a sistemas cuánticos utilizando un abordaje basado en semánticas no deterministas Nmatriciales probando, entre otros, el siguiente resultado: *los estados cuánticos pueden ser interpretados como valuaciones de una Nmatriz*. Es decir, dado un sistema cuántico, todos sus estados (vistos como medidas de probabilidad) cumplen con las condiciones impuestas sobre las valuaciones Nmatriciales (para una Nmatriz particular, que podríamos llamar Nmatriz cuántica). Por otro lado, esos trabajos también prueban que todas las valuaciones de esta Nmatriz cuántica satisfacen el teorema de *Gleason* (Gleason 1957), por lo cual satisfacen las condiciones de estados como medida de probabilidad. Por lo tanto, se prueba que es posible conectar a los estados cuánticos con las valuaciones Nmatriciales. Esto no ocurre con las valuaciones matriciales deterministas.
- La teoría de quasets fue inspirada originalmente en la teoría cuántica. La motivación principal de sus fundadores fue la de dar una semántica apropiada para los sistemas cuánticos utilizando quasets. Esto significa que la asociación quasets-semántica ya tiene una conexión con ciertos aspectos de la interpretación estándar de la mecánica cuántica. Por lo tanto, el hecho de incorporar el formalismo de quasets en el corazón de la semántica no determinista de Nmatrices puede interpretarse como un movimiento natural de exploración teórica en lo que respecta al desarrollo de formalismos lógicos y algebraicos inspirados

en la teoría cuántica.

Por las razones expuestas arriba, en este trabajo, nos enfocaremos en obtener una versión de dicha semántica utilizando QST. Para alcanzar este objetivo, necesitamos realizar, además, varios desarrollos subsidiarios que resultan tener un interés en sí mismos (especialmente, en lo que respecta a la axiomática de QST). Sin embargo, es importante no perder de vista que el objetivo principal del trabajo es brindar una generalización de la teoría de Nmatrices utilizando QST como teoría de conjuntos no estándar.

La propuesta de buscar una matemática no estándar inspirada en las propiedades de los sistemas cuánticos fue claramente explicitada por Y. Manin, quien planteó que:

> Deberíamos considerar la posibilidad de desarrollar un lenguaje completamente nuevo para hablar del infinito. [recordamos que la teoría de conjuntos es también conocida como 'teoría de lo infinito'] (...) Me gustaría subrayar que éste [el concepto de conjunto] es más bien una extrapolación de la física de nuestra experiencia diaria, donde podemos distinguir cosas, contarlas, ponerlas en algún orden, etc. La nueva física cuántica nos ha mostrado modelos de entidades con un comportamiento completamente diferente. Incluso los "conjuntos"de fotones en una caja reflectante, o los electrones de una muestra de níquel son mucho menos cantorianos que el conjunto de los granos de arena.[2] En general, una infinidad física altamente probabilística parece considerablemente más complicada e interesante que una simple infinidad de "cosas"(Manin 1976).

En la misma línea, se han desarrollado otras versiones no estándar de la matemática inspiradas en la teoría cuántica, tales como la teoría cuántica de conjuntos (Takeuti 1981), quasets (QST) (Dalla Chiara and di Francia 1993, Dalla Chiara et al. 1998, French y Krause 2006) y quasisets ('qsets') ($\mathfrak{Q}$) (Krause 1992, French y Krause 2006, Barros et al. 2022). Es importante destacar que, si bien inspirados en la teoría cuántica, estos desarrollos no necesariamente encuentran aplicaciones o una interpretación directa en la física. Por ello, este tipo de investigación, en principio, pertenece a las esferas de la lógica y la mátemática. Hecha esta salvedad, es importante destacar que quasets y quasisets han sido utilizadas para representar formalmente las propiedades de sistemas cuánticos en problemas de filosofía de la física. En lo que respecta a este trabajo, si bien su motivación principal se sitúa en el campo de la lógica, específicamente, en el desarrollo y estudios de sistemas no clásicos, esbozaremos las líneas generales de posibles interpretaciones físicas de nuestro formalismo en la sección 3.

Nos enfocaremos principalmente en QST, aunque haremos referencia a RST (Rough Sets) mostrando el vínculo que esta última guarda con QST y estableceremos también algunos vínculos con $\mathfrak{Q}$. Comenzaremos estudiando las implicaciones que traería para una semántica Nmatricial el cambiar la teoría de conjuntos ZF por otra en la cual exista una tercera posibilidad de pertenencia para los conjuntos. Es decir, que la pertenencia ($\in$) y la no pertenencia ($\notin$) no agoten todas las posibilidades. La teoría QST cumple con tal requisito. Sin embargo, dado que QST es una teoría axiomática de conjuntos (con una copia interna de ZFC), tiene muchas características y teoremas que son relevantes para el desarrollo de una semántica Nmatricial alternativa. El estrecho vínculo mostrado entre QST y Rough Sets (RST) seguirá investigándose en futuros trabajos.

Exploraremos algunos de los problemas que surgen a raíz del cambio en el primitivo de pertenencia. Dado que cambiar dicha relación tiene consecuencias en todos los niveles de la teoría, el cambio puede ser aplicado desde el principio; es decir, desde la definición de número, relación, función, etc., o puede ser aplicada en niveles superiores conservando hasta ese punto la pertenencia clásica. Esto es posible gracias a que QST conserva en su interior una copia de ZFC. Podemos expresar esto en términos semánticos de la siguiente forma: el cambio puede ser introducido, por ejemplo, desde el principio, utilizando funciones de interpretación para los conectivos que estén definidos sobre quasets. Puede ser introducido también en los conjuntos de valores de verdad, de forma tal que los viejos conjuntos de valores designados y no designados sean las *qextensiones* (definición 2.3) de los quasets de valores de verdad. Finalmente, puede introducirse a nivel de la definición de consecuencia lógica (sección 4.2), con respecto a la preservación de valores designados (es decir, en un metanivel). En todos los casos, los quasets utilizados deben ser tales que su *qextensión* coincida con los conjuntos clásicos empleados en las definiciones estándar. Estudiaremos algunas de estas posibilidades y mostraremos los cambios producidos a nivel de las inferencias válidas del sistema.

Debido a que nuestro trabajo está estrechamente vinculado con la teoría de quasets (QST) y las semánticas no deterministas de Nmatrices, en la sección 2 daremos una presentación formal de estos sistemas, además de mostrar los aspectos básicos de la teoría de Rough Sets. La relación entre QST y RST tiene como objetivo mostrar, por un lado, que la axiomática extendida que presentaremos admite modelos y, por el otro, establecer posibles vínculos entre QST y la vasta gamma de aplicaciones de RST.

Los resultados principales de este trabajo son presentados en las secciones 3 y 4. En la sección 3 se analizan, entre otras cosas, nuevas alternativas para extender la axiomática original de QST (ya que la presentación original no alcanza para nuestros objetivos). Presentamos dos axiomáticas ampliadas, que denotamos por QST^{+} y $\overline{QST}^{+}$. Se discuten las nociones de quasets complementarios, relaciones entre quasets y, finalmente, se analiza una posible topología. También la teoría de Rough Sets (RST) vuelve a ser analizada como alternativa en la sección 3.7. En esa subsección dejamos en evidencia el vínculo que dicha teoría mantiene con QST. Se muestran claras similitudes estructurales con QST, sugiriendo que este sistema puede ser relevante a la hora de establecer la base para una semántica. *Como RST cuenta con múltiples aplicaciones, que van desde las lógicas de conceptos vagos a los modelos no estándar, mostrar estas similitudes formales puede ser de interés para futuros desarrollos e implementaciones de QST*.

A pesar de la extensión de algunas secciones, el lector no debe perder de vista que el principal objetivo del trabajo es *dar un fundamento sólido a las nuevas valuaciones Nmatriciales basadas en QST*. En la sección 4, analizamos diferentes posibilidades en lo que respecta a generalizar las definiciones de *conjunto de interpretación para los conectivos Nmatriciales*. Tales generalizaciones coinciden con las definiciones Nmatriciales clásicas cuando los conjuntos considerados son clásicos. Exploramos también, en esa sección, las posibles relaciones de consecuencia lógica (y el conjunto de teoremas) que se abren como alternativas válidas cuando generalizamos los conjuntos. En la subsección 4.4 nos adentramos en el terreno de las dificultades que aparecen a la hora de dar representaciones explícitas (estilo tablas) cuando se cuenta con una teoría como QST. Mostramos que la información que proveen las partes clásicas de los conjuntos involucrados puede no ser suficientes o sugerir interpretaciones incorrectas. Finalmente, en 4.5, proponemos algunas posibilidades para generalizar el sistema de Nmatrices al caso de QST. A modo de cierre, las conclusiones son presentadas junto con algunas propuestas acerca de cómo continuar en trabajos futuros.

> *Observación*: hay que prevenir al lector sobre el riesgo de perder la línea argumentativa principal a lo largo del trabajo. Como remarcamos en la Introducción, el objetivo que motiva a este trabajo es el de establecer las bases para una semántica Nmatricial fundada en QST, con la intención de que tal sistema pueda ser adaptado para dar una descripción formal de la cuántica (al margen, por supuesto, de su interés intrínseco en el área de la lógica). El problema principal que encontramos, es que la formulación original de QST ofrecida por Giuliano Toraldo di Francia y Maria Luisa Dalla Chiara no contaba con una axiomática lo suficientemente robusta como para garantizar valuaciones que no sean las clásicas. Es por esta razón que la primera tarea fue ampliar la axiomática de QST. Dado que esta tarea involucró la introducción de un nuevo primitivo (la unión de quasets, $\sqcup$), consideramos adecuado decir algo acerca de su caracterización semántica y su interacción con el resto de los primitivos. Esto nos llevó a introducir la sección 3.3 y a la discusión presentada en el apéndice A. No podríamos haber presentado las Nmatrices en QST directamente, sin antes desarrollar un marco formal adecuado para nuestros objetivos. Dado que una Nmatriz está constituida esencialmente por conjuntos de valores de verdad (designados y no designados), así como conjuntos/funciones de interpretación para cada conectivo y valuaciones (además, por supuesto, de una relación de consecuencia lógica), fue necesario garantizar primero la existencia de estos objetos en la nueva axiomática. Por otro lado, es importante remarcar que, si bien la sección 4.4

no tiene una relevancia directa en el establecimiento de la base formal necesaria para nuestro objetivo, sus contenidos cobran importancia a la hora de aplicar el aparato formal, como mostramos en el ejemplo de 4.5.

La dificultad propia de trabajar con un sistema axiomático no estándar nos ha obligado a tratar varios tópicos diferentes (aunque relacionados), con el fin de fundamentar la línea principal de investigación. No es el objetivo de este trabajo, ni sería posible por cuestiones de extensión en el marco de un artículo, explorar a fondo cada una de estas vertientes (cosa que probablemente hagamos en futuros trabajos). Nuestro compromiso radica en brindar un análisis mínimo de algunas de estas, que sea al mismo tiempo suficiente para los fines perseguidos. Esto es, asegurar los recursos mínimos necesarios para fundamentar la incorporación de QST al formalismo de Nmatrices.

2. Conceptos preliminares

El objetivo de esta sección es presentar los conceptos básicos para comprender las futuras secciones y los principales desarrollos de este trabajo. Como los sistemas a relacionar son Teoría de Quasets, Nmatrices y Rough Sets, daremos una introducción a cada uno de ellos para que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

2.1. Teoría de quasets QST

En esta parte, presentamos una introducción a QST. Para el lector interesado, recomendamos (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993, Dalla Chiara et al. 1998). Luego, en 3, discutiremos algunas cuestiones de interés, que amplían la obra original y son necesarias para el objetivo principal de este trabajo: *desarrollar un sistema Nmatricial basado en QST*.

QST fue desarrollada por María Luisa Dalla Chiara (1938 -) y Giuliano Toraldo di Francia (1916 - 2011) y está inspirada en las propiedades de los sistemas cuánticos. En particular, en el hecho de que sus colecciones no parecen formar conjuntos como en las teorías usuales, donde los elementos son siempre distinguibles unos de los otros. La intención de sus autores era capturar esta particularidad de las colecciones cuánticas a través de un sistema axiomático y *utilizar este sistema para caracterizar una semántica formal para ciertos lenguajes cuánticos*, algo que, para ellos, no debería hacerse en las teorías de conjuntos habituales. Pero, hablando en términos estrictos, como la lógica subyacente de QST es la *lógica clásica de primer orden con identidad*, resulta que los entes de este formalismo siempre pueden distinguirse entre ellos, a pesar de que, para algunos entes descriptos por la teoría, como electrones (en la interpretación pretendida), no tengamos forma epistémica de corroborarlo. Este es un detalle importante: la lógica clásica, y por esto también las teorías de conjuntos habituales, son tales que *siempre se pueden discernir dos elementos cualesquiera: si tenemos dos, son diferentes*.

El tema de la identidad es singularmente problemático cuando se trata con sistemas cuánticos, al menos, en la formulación usual de la teoría[3]. En uno de sus primeros trabajos sobre el tema (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993), uno de sus objetivos, como bien nombramos, era brindar una semántica adecuada para lenguajes que trataran sobre sistemas cuánticos. *Nuestro objetivo es básicamente el mismo, aunque por una vía distinta a la de estos autores*. En términos estrictos, nuestro abordaje es más general, pues trata sistemas formales muy generales que tienen inspiración en el sistema de esos autores (la teoria de *quasets*). Aunque hablemos en general, y desde un punto de vista lógico, quedará claro que los resultados que obtengamos se aplican también al sistema de quasets. En esta presentación, no seguiremos la notación del trabajo original de Dalla Chiara y Toraldo di Francia, seguiremos una versión más reciente desarollada en (Dalla Chiara et al. 1998).

La teoría QST cuenta con un lenguaje lógico de primer orden con igualdad. Su lenguaje no lógico incluye los siguientes conceptos primitivos específicos:

- Un predicado monádico: urobjeto (O).
- Tres predicados binarios: la relación de pertenencia positiva ($\in$), la pertenencia negativa ($\notin$), y la relación de inclusión ($\subseteq$). Cuando escribimos '$x \in y$', queremos decir que x *ciertamente* pertence a y, y si $x \notin y$, significa que x ciertamente *no* pertenece a y. De ese modo, la negación $\neg(x \in y)$ dice que es falso que x ciertamente pertenece a y, lo que (de acuerdo a los axiomas, por ejemplo por 2.2) no equivale a decir que x ciertamente no pertenece a y.
- Un símbolo funcional unario: el cuasicardinal (*qcard*).
- Un símbolo funcional binario: la intersección entre quasets ($\sqcap$).

Definición 2.1. Un quaset es algo que no es un urobjeto:

$$Q(x) := \neg O(x)$$

Axioma 2.1. Todo lo que tiene elementos es un quaset:

$$\forall x \quad \forall y \ (x \in y \longrightarrow Q(y))$$

Axioma 2.2. Si se sabe con certeza que algo no pertenece a un quaset, entonces no se da que pertenezca con certeza al quaset dado. Sin embargo, la recíproca no es cierta en general:

$$\forall x \ \forall y \ (x \notin y \rightarrow \neg(x \in y))$$

El axioma anterior hace que existan instancias del principio $((x \in y) \vee (x \notin y))$ que sean refutables, y por ello exista la posibilidad de relaciones de pertenencia indeterminadas, lo que hace que QST tenga cierta relación con la teoría de los *fuzzy sets* (Weidner 1981). Por otra parte, como sugieren los autores de (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993), el *saber con certeza* puede interpretarse como *pertenece con seguridad* si uno no quiere sugerir una lectura epistémica. Como es bien sabido, la mecánica cuántica admite tanto interpretaciones ontológicas del *principio de incertidumbre* de Heisenberg como también interpretaciones epistémicas del mismo (Solé Bellet 2010, Manero Orozco 2018).

Axioma 2.3. La relación de inclusión entre quasets ($\subseteq$) es un orden parcial (reflexiva, antisimétrica y transitiva).

El símbolo $\subseteq$ tiene un significado intensional, pero no necesariamente extensional. $x \subseteq y$ se puede leer como "el concepto x implica al concepto y".

Axioma 2.4. La inclusión de quasets implica la inclusión extensional.

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \longrightarrow \forall z\ ((z \in x \longrightarrow z \in y) \wedge (z \notin y \longrightarrow z \notin x))$$

Definición 2.2 (Pertenencia débil o indeterminada)**.** Sean x un quaset e y un objeto cualquiera. Decimos que y pertenece débilmente a x, y lo denotamos $y \in^{-} x$, si se cumple que es falso que y pertenece con seguridad a x y también es falso que con seguridad no pertenece a x, esto es,

$$y \in^{-} x := \neg(y \in x) \wedge \neg(y \notin x). \tag{1}$$

Intuitivamente, y es algo que *no está completamente dentro* de x, o no se tiene absoluta certidumbre de ello, ni tampoco *está completamente fuera* de él.

Con la definición anterior se puede asegurar que la siguiente cláusula de QST es siempre verdadera:

$$\forall x \forall_Q y ((x \in y) \vee (x \in^{-} y) \vee (x \notin y))$$

Axioma 2.5. Todo quaset tiene una única *qextensión*, donde la *qextensión* de un quaset x, denotada por *qext(x)*, es el único quaset que contiene con certeza a todos los elementos de x y con certeza no contiene a todas las otras entidades:

$$\forall_Q x\ \exists!_Q y\ \forall z\ ((z \in y \longleftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \longleftrightarrow \neg(z \in x)))$$

En la expresión anterior, los cuantificadores $\forall_Q x P(x)$ y $\exists_Q x R(x)$ deben ser interpretados como $\forall x (Q(x) \longrightarrow P(x))$ y $\exists x (Q(x) \wedge R(x))$ respectivamente.

El axioma anterior justifica hacer la siguiente definición:

Definición 2.3. (*qextensión* de un quaset)

$$\forall x\ \forall y\ (y = qext(x) \longleftrightarrow \forall z\ ((z \in y \longleftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \longleftrightarrow \neg(z \in x))))$$

Definición 2.4. Los conjuntos (clásicos) son los quasets que son idénticos a su *qextensión*.

Axioma 2.6. Existe un quaset que con seguridad no tiene ningún elemento:

$$\exists_Q y\ \forall x\ (x \notin y)$$

Podemos definir un predicado monádico para representar conjuntos clásicos dentro de QST. La copia de ZF que QST tiene incorporada viene dada por los todos los quasets cuya *qextensión* coincide con el propio quaset. Esto es,

Definición 2.5. $Z(x) := x = qext(x)$.

En QST, la conjunción (o intersección) entre quasets es un concepto primitivo. Esto se denota con el símbolo $\sqcap$ y cumple con lo siguiente:

Axioma 2.7. $\sqcap$ representa la conjunción débil de quasets. Esta conjunción débil coincide con la intersección usual para los conjuntos:

$$\forall_Q x\ \forall_Q y\ ((x \sqcap y \subseteq x\ \wedge\ x \sqcap y \subseteq y) \wedge (Z(x) \wedge Z(y) \rightarrow x \sqcap y = x \cap y))$$

Lo anterior significa que puede aplicarse un procedimiento de *separación*. Observe que los axiomas no exigen la existencia de quasets propios (que no sean conjuntos)[4]. Desde un punto de vista intuitivo, la *qextensión* de un quaset propio no representa una contrapartida semántica adecuada para la noción habitual de extensión. Piense, por ejemplo, en el hecho de que la *qextensión* de un quaset, con cuasicardinal mayor que 0, podría ser vacía.

Para toda fórmula ϕ de ZF (o ZFC), sea ϕ^z su correspondiente fórmula en QST relativizada a conjuntos (quasets que coinciden con su *qextensión*).

Axioma 2.8. Si ϕ es cualquier instancia de un axioma de ZF, entonces ϕ^z es un axioma de QST.

Axioma 2.9. Todo quaset tiene un cuasicardinal único, que es un número cardinal y se observa que la notación $card(y)$ significa que y es un cardinal, definido el la 'parte clasica' de QST.

$$\forall_Q x \exists! y\ (card(y) \wedge qcard(x) = y)$$

Axioma 2.10. El cuasicardinal coincide con el cardinal en el caso de conjuntos:

$$\forall x (Z(x) \longrightarrow qcard(x) = card(x))$$

Axioma 2.11. El cuasicardinal de un subquaset es menor o igual que el cuasicardinal del quaset dado:

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \longrightarrow qcard(x) \leq qcard(y))$$

Axioma 2.12. El cuasicardinal de un quaset dado es mayor o igual que el cuasicardinal de su *qextensión*:

$$\forall x (qcard(x) \geq qcard(qext(x)))$$

De esta manera, concluye la presentación de la axiomática original de QST. Por cuestiones didácticas, hemos decidido introducir a continuación un nuevo axioma (que presenta un nuevo símbolo primitivo), que será clave en el desarrollo posterior. El siguiente axioma introduce un nuevo conectivo, unión de quasets ($\sqcup$), que pertenece al lenguaje no lógico ampliado de QST (lo que en la sección 3 será llamado QST^+). Tal conectivo no pertenece al lenguaje (no lógico) original de QST. Esto es, la axiomatización original de QST no cuenta con este nuevo conectivo, ni con un axioma de unión que regule su comportamiento como pasa en ZF o $\mathfrak{Q}$ (aunque, como ya vimos, cuenta con el axioma relativizado a conjuntos clásicos). El siguiente axioma puede ser considerado el dual del axioma de la conjunción débil de quasets.

Axioma 2.13. Unión de quasets.

$$\forall x \forall y ((x \subseteq x \sqcup y \wedge y \subseteq x \sqcup y) \wedge (Z(x) \wedge Z(y) \rightarrow x \sqcup y = x \cup y))$$

En la sección 3 vincularemos este nuevo conectivo con los demás y estableceremos condiciones necesarias para su buen comportamiento.

> *Observación*: tanto este axioma como el correspondiente a la conjunción débil de quasets (2.7) pueden resultar insuficientes a la hora de realizar algunas inferencia o probar algunos teoremas. Mientras sean suficiente para garantizar nuestros objetivos semánticos relativos a las Nmatrices (a lo sumo, agregando algunos postulados extras como haremos en 3.1), los mantendremos de esta manera. Llegado el caso, pueden ser exploradas otras alternativas incorporando axiomas más fuertes o definiciones extras. Dentro de las alternativas a ser exploradas en futuros trabajos, podríamos tener las siguientes:
>
> $$x \sqcap y := \{z : \neg(z \notin x) \wedge \neg(z \notin y)\} \quad ; \quad x \sqcup y := \{z : \neg(z \notin x) \vee \neg(z \notin y)\}.$$
>
> Por supuesto, estos cambios repercutirían directamente sobre todos los resultados a los que arribaremos. Además, tanto la unión de quasets como su conjunción débil dejarían de ser primitivos del nuestro lenguaje, algo que iría contra el espíritu de la axiomatización original de Dalla Chiara y Toraldo di Francia (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993), pero eso se puede ciertamente hacer.

2.2. Rough Sets

Muchas de las propiedades que se analizan en nuestro trabajo, y que caracterizan a QST, se comprometen principalmente con el nuevo grado de libertad en la pertenenica, *la pertenencia indeterminada*. Presentar otro sistema formal que cuente con esta propiedad es el objetivo de esta sección. Esto permitirá extender la mayor parte de los razonamientos mostrados a esta nueva axiomática, la axiomática de los Rough Sets. Por otro lado, en la sección 3.7, mostraremos algunas similitudes formales entre QST y RST. Con respecto al objetivo central de nuestro trabajo, esta sección es de importancia (junto con 3.7) a la hora de garantizar modelos de nuestra axiomática extendida.

Seguiremos en esta parte el tratamiento dado en (Pawlak 1982). El lector interesado puede también consultar (Pawlak 1986, Pawlak 1987, Orłowska 1982, Orłowska 1985). Rough Sets es una teoría que tiene ampliamente desarrolladas aplicaciones en diferentes áreas, como, por ejemplo, razonamiento del sentido común, Machine Learning, IA, Teoría de la decisión y Teoría de la información, entre otros (Pawlak y Skowron 2007a, Pawlak y Skowron 2007c, Pedrycz et al. 2001, Mahajan et al. 2012, Peters et al. 2003, Skowron 2005). Además tiene ciertos parecidos con la Teoría de conjuntos difusos, Teoría de la tolerancia y Análisis no estándar. Por lo tanto, relacionar RST con QST y Nmatrices puede ser beneficioso para varias de estas áreas.[5]

Sea U cierto conjunto (de ZF) llamado dominio y R una relación (diádica) de equivalencia. Llamaremos al par $A = (U, R)$ espacio de aproximación y a R la relación de indiscernibilidad en A. Es decir, si $(x, y) \in R$ (o xRy) diremos que x e y son indiscernibles en A. Llamaremos conjuntos elementales o átomos a las clases de equivalencia de R y consideraremos que el conjunto vacío es un conjunto elemental. Al conjunto de todas las clases de equivalencia en A lo denotaremos como A/R. Toda unión finita de conjuntos elementales en A se llamará conjunto compuesto en A. La familia de todos los conjuntos compuestos en A se denotará como $Com(A)$. Obviamente $Com(A)$ es un álgebra booleana, es decir, la familia de todos los conjuntos compuestos es cerrada bajo intersección, unión y complemento de conjuntos y satisface los axiomas requeridos. Todos los átomos pueden ser considerados también conjuntos compuestos, ya que son la unión de sí mismo con el conjunto vacío.

Sea X un subconjunto de U. El menor conjunto compuesto en A, tal que contenga a X, será llamado *mejor aproximación superior de* X y lo denotaremos por $\overline{Apr}_A(X)$. De igual forma, al mayor conjunto en A, que esté contenido en X, lo llamaremos *mejor aproximación inferior de* X y lo denotaremos por $\underline{Apr}_A(X)$. Cuando el contexto de trabajo, A, quede claro, puede prescindirse del subíndice. El *borde o perímetro*, Bnd_A, queda definido como

$$Bnd_A(X) = \overline{Apr}_A(X) - \underline{Apr}_A(X) \tag{2}$$

> Observación: la nomenclatura que estamos utilizando es la original utilizada en Pawlak (1982). Cuando se trata de sistemas y procesos de información, suele utilizarse otra notación (equivalente) que se basa en funciones de indiscernibilidad (ver Pawlak y Skowron 2007b). Nosotros hemos recurrido a la nomenclatura más ortodoxa debido a que es más afín a nuestros intereses. Que esté expresada en función de las dos pertenencias que ahora definiremos hace que la relación con QST sea más transparente.

En Rough Sets, se definen dos conectivos de pertenencia llamados pertenencia fuerte ($\underline{\in}_A$) y pertenencia débil ($\overline{\in}_A$).

Definición 2.6. Si $x \in X, X \subseteq U$, entonces

$$x \, \underline{\in}_A X \text{ si y sólo si } x \in \underline{Apr}_A(X)$$

Definición 2.7. Si $x \in X, X \subseteq U$, entonces

$$x \, \overline{\in}_A X \text{ si y sólo si } x \in \overline{Apr}_A(X)$$

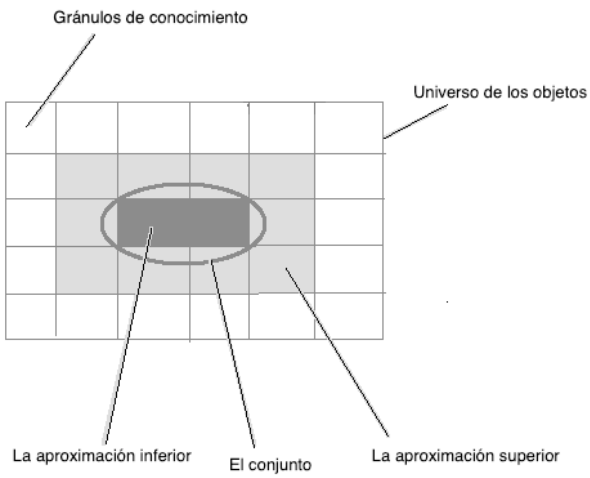

Figura 1: La idea intuitiva de los Rough Sets, figura inspirada en (Suraj 2004).

Estos conectivos de pertenencia pueden relacionarse con los de QST. No hay que olvidar, por supuesto, que estas dos relaciones recién definidas no son, justamente, primitivos de la teoría, como es el caso de QST, sino que los hemos definido a partir del único primitivo de pertenencia que tiene ZF. De todos modos, mientras estemos sólo con los recursos de Rough Sets, en el interior de su teoría (sin poder mirar fuera) estas dos pertenencias se comportarán de una manera semejante a las de QST.

Si $x \underline{\in}_A X$, diremos que x *pertenece con certeza* a X, o que x *seguramente pertenece* a X. Si, en cambio, $x \overline{\in}_A X$, diremos que x *posiblemente pertenezca* a X. Como bien se nombra en (Pawlak 1982), esto permite interpretar las aproximaciones como contrapartes de necesidad y posibilidad en lógica modal. Por supuesto, se cumple que

$$\underline{Apr}_A(X) = \{x \in U : x \underline{\in}_A X\}$$

$$\overline{Apr}_A(X) = \{x \in U : x \overline{\in}_A X\}$$

De esta forma, se puede desarrollar la teoría en términos de funciones de pertenencia fuertes y débiles o en términos de aproximaciones. Para la comparación con QST nos conviene la primera opción (en (Pawlak 1982), el autor prefiere la segunda opción por simplicidad). En la figura 1 se muestran algunos de los conceptos definidos.

Algunas de las propiedades que se verifican son (ver la lista exhaustiva en Pawlak 1982):

(3) $$\underline{Apr}(X) \subset X \subset \overline{Apr}(X)$$

(4) $$\underline{Apr}(U) = \overline{Apr}(U) = U$$

(5) $$\underline{Apr}(\emptyset) = \overline{Apr}(\emptyset) = \emptyset$$

(6) $$\overline{Apr}(\overline{Apr}(X)) = \underline{Apr}(\overline{Apr}(X)) = \overline{Apr}(X)$$

(7) $$\underline{Apr}(\underline{Apr}(X)) = \overline{Apr}(\underline{Apr}(X)) = \underline{Apr}(X)$$

Donde se ha prescindido del subíndice A en todas las expresiones. En Rough Sets existen ciertas relaciones de igualdad, que, de alguna manera, muestran una semi-extensionalidad. Alguna de estas vamos a pensarlas en relación a los quasets.

Definición 2.8. Igualdades en Rough Sets. Sea $A = (U, R)$ un espacio de aproximación y $X, Y \subseteq U$.

- Los conjuntos X, Y son aproximadamente iguales inferiormente (roughly bottom-equal) en A, $X \eqsim_A Y$, si y sólo si $\underline{Apr}_A(X) = \underline{Apr}_A(Y)$.
- Los conjuntos X, Y son aproximadamente iguales superiormente (roughly top-equal) en A, $X \simeq_A Y$, si y sólo si $\overline{Apr}_A(X) = \overline{Apr}_A(Y)$.
- Los conjuntos X, Y son aproximadamente iguales (roughly equal) en A, $X \approx_A Y$, si y sólo si $\underline{Apr}_A(X) = \underline{Apr}_A(Y)$ y $\overline{Apr}_A(X) = \overline{Apr}_A(Y)$.

Por último, estableceremos las relaciones de inclusión en RST.

Definición 2.9. Sea $A = (U, R)$ un espacio de aproximación y $X, Y \subseteq U$.

- Decimos que X está aproximadamente incluido en Y inferiormente (X is roughly bottom-included in Y), $X \underset{\sim}{\subsetneq}_A Y$, si $\underline{Apr}_A(X) \subset \underline{Apr}_A(Y)$.
- Decimos que X está aproximadamente incluido en Y superiormente (X is roughly top-included in Y), $X \,\tilde{\subset}_A\, Y$, si $\overline{Apr}_A(X) \subset \overline{Apr}_A(Y)$.
- Decimos que X está aproximadamente incluido en Y, $X \,\tilde{\underset{\sim}{\subsetneq}}_A\, Y$, si $\underline{Apr}_A(X) \subset \underline{Apr}_A(Y)$ y $\overline{Apr}_A(X) \subset \overline{Apr}_A(Y)$.

Se puede corroborar que estas relaciones son de orden entre los conjuntos.

Como caso particular podemos nombrar que se valida la siguiente proposición.

$$\text{Si } X \,\tilde{\underset{\sim}{\subsetneq}}_A\, Y \text{ e } Y \,\tilde{\underset{\sim}{\subsetneq}}_A\, X, \text{ entonces } X \approx Y. \tag{8}$$

2.3. Semánticas no deterministas

Las matrices multivaluadas no deterministas (Nmatrices) son un campo fructífero de investigación en rápida expansión. Fueron introducidas en (Avron y I. Lev 2005, Avron y Lev 2005, Avron y Konikowska 2004) y, desde entonces, se han desarrollado rápidamente como una teoría lógica fundamental encontrando numerosas aplicaciones, que van desde la teoría de autómatas, hasta la mecánica cuántica, pasando por varias áreas de la lógica, tales como las lógicas modales. La novedad de las Nmatrices consiste en que este formalismo extiende la semántica algebraica multivaluada habitual de los sistemas lógicos al importar la idea de cálculos no deterministas, permitiendo que el valor de verdad de una fórmula se elija de forma no determinista a partir de un conjunto dado de opciones. Las Nmatrices han demostrado ser una herramienta poderosa, cuyo uso conserva todas las ventajas de las matrices ordinarias multivaluadas, al mismo tiempo que es aplicable a una gama mucho más amplia de lógicas (Avron y Zamansky 2005). De hecho, hay muchas lógicas no clásicas (proposicionales) que, si bien no tienen matrices características finitas de múltiples valores, admiten Nmatrices finitas y, por lo tanto, son decidibles.

2.3.1. Matrices deterministas

En esta sección seguiremos el enfoque presentado en Avron y Zamansky (2005). En lo que sigue, L es un lenguaje proposicional y Frm_L denota al conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje. Las metavariables φ, ψ,..., recorren L-fórmulas, mientras que Γ, Δ,..., se utilizarán para conjuntos de L-fórmulas. Además, todos los conjuntos son clásicos. El método general estándar para definir la lógica proposicional se basa en el uso de matrices deterministas (posiblemente de muchos valores):

Definición 2.10. Una matriz para L es una tupla

$$P = \langle V; D; O \rangle$$

donde

- V es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- D (valores designados) es un conjunto propio no vacío de V.
- Para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L, O incluye una función de interpretación $\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to V$.

Una valuación parcial en P es una función v, que va de V a un subconjunto $\mathscr{W} \subseteq Frm_L$ cerrado bajo subfórmulas, tal que para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L y para toda $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathscr{W}$:, se cumple lo siguiente

$$v(\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n)) \tag{9}$$

Proposición 2.1. Analiticidad. Toda valuación parcial de una matriz P para L, definida sobre un conjunto de L-fórmulas cerrado bajo subfórmulas, puede ser extendida a una valuación total en P.
Debido a esta propiedad, cualquier matriz finita P será decidible.

2.3.2. Matrices no deterministas (Nmatrices)

Ahora pasamos al caso no determinista. La principal diferencia es que, en oposición a las matrices deterministas, las no deterministas, dados sus valores de verdad de entrada, asignan un conjunto de valores posibles (en lugar de uno solo valor).

Definición 2.11. Una matriz no determinista (Nmatriz) para L es una tupla $M = \langle V, D, O \rangle$, donde:

- V es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- $D \in \mathscr{P}(V)$ (valores de verdad designados) es un subconjunto propio no vacío de V.
- Para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L, O incluye la correspondiente función de interpretación
$$\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to \mathscr{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

Definición 2.12.

- Una valuación parcial dinámica en M es una función v sobre un conjunto cerrado bajo subfórmulas $\mathscr{W} \subseteq Frm_L$ a V, tal que para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L y para toda $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathscr{W}$ se cumple lo siguiente:

$$v(\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)) \in \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n))$$

Una valuación parcial en M es llamada valuación (total) si su dominio es Frm_L.

- Una valuación (parcial) estática en M es una valuación (parcial) dinámica que satisface además el siguiente principio de composicionalidad (o funcionalidad) (definido en algún $\mathscr{W} \subseteq Frm_L$): para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L y para cada $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{W}$, si $v(\psi_i) = v(\varphi_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces

$$v(\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = v(\diamondsuit(\varphi_1, \ldots, \varphi_n))$$

Es importante señalar que las matrices clásicas (deterministas) corresponden al caso en que cada $\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to \mathscr{P}(V)$ es una función que toma valores de singletons (singulete). En este caso no hay diferencia entre valuaciones estáticas y dinámicas, tenemos determinismo (funcional).

Para comprender la diferencia entre matrices ordinarias y Nmatrices, recordamos que en el caso determinista, el valor de verdad asignado por una valuación v a una fórmula compleja se define de la siguiente manera: $v(\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n))$. El valor de verdad asignado a $\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ está unívocamente determinado por los valores de verdad de sus subfórmulas: $v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n)$. Sin embargo, este no es el caso de las Nmatrices: en general, los valores de verdad de $\psi_1, \ldots, \psi_n$ no determinan unívocamente el valor asignado a $\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, ya que diferentes valuaciones que tengan los mismos valores de verdad para $\psi_1, \ldots, \psi_n$ pueden asignar diferentes elementos del conjunto de interpretación $\widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n))$ a $\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Por lo tanto, las semánticas no deterministas de Nmatrices no cumplen veritativo funcionalidad, en oposición a las semánticas matriciales. En la tabla (1), se muestran algunas diferencias entre las matrices y las Nmatrices.

Cuadro 1: Matrices deterministas vs Nmatrices.

	Matrices deterministas	**Nmatrices**
Conjunto de valores de verdad	V	V
Conjunto de valores designados	$D \subset V$	$D \subset V$
Conectivos $\diamondsuit$	$\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to V$	$\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to \mathscr{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$
Valuaciones	No dinámicas	Posiblemente dinámicas / no estáticas.
Veritativo funcional	Sí	No necesariamente

Ahora, revisaremos las definiciones estándar de consecuencia lógica (Avron y Zamansky 2005).

Definición 2.13.

- Una valuación (parcial) v en M satisface una fórmula ψ ($v \models \psi$) si ($v(\psi)$ está definido y) $v(\psi) \in D$. Decimos que es un modelo de Γ ($v \models \Gamma$) si satisface cada fórmula de Γ.
- Decimos que ψ es dinámicamente (estáticamente) válida en M, en símbolos $\models^d_M \psi$ ($\models^s_M \psi$), si $v \models \psi$ para cada valuación dinámica (estática) v en M.

- La relación de consecuencia dinámica (estática) inducida por M es definida de la siguiente manera: $\Gamma \vdash^d_M \Delta$ ($\Gamma \vdash^s_M \Delta$) si cada modelo dinámico (estático) v en M de Γ satisface algún $\psi \in \Delta$.

Obviamente , la relación de consecuencia estática incluye a la dinámica, es decir, $\vdash^d_M \subseteq \vdash^s_M$. Además, para las matrices ordinarias, tenemos que $\vdash^s_M = \vdash^d_M$.

Proposición 2.2. Sea M una Nmatriz de dos valores que tiene al menos una operación no determinista. Entonces no hay una familia finita de matrices ordinarias finitas F, tales que $\vdash^d_M \psi$ sii $\vdash_F \psi$.

Proposición 2.3. Para cada Nmatriz M (finita), hay una familia (finita) de matrices ordinarias F, tales que $\vdash^s_M = \vdash_F$.

Así, sólo el poder expresivo de la semántica dinámica basado en Nmatrices es más fuerte que el de matrices ordinarias. El siguiente teorema tomado de (Avron y I. Lev 2005) es una generalización de la proposición 2.1 para el caso de las Nmatrices:

Proposición 2.4. (Analiticidad) Sea $M = \langle V, D, O\rangle$ una Nmatriz para L, y sea v' una valuación parcial en M. Entonces v' puede extenderse a una valuación (total) en M.

3. Discusión e interpretación de los axiomas de QST. Ampliando su axiomática.

Uno de los objetivos de esta parte es discutir algunas cuestiones relativas a la interpretación de ciertos axiomas. Como los axiomas originales de QST no son suficientes para nuestros objetivos semánticos, en esta sección también complementaremos la axiomática con algunos enunciados nuevos. Los sistemas basados en las axiomáticas ampliadas serán denotados por QST$^+$ y $\overline{QST}^+$. Tanto las conclusiones a las que arribemos como los temas que dejemos abiertos serán pertinentes para el resto del trabajo. La bibliografía sobre QST no es extensa, por lo tanto, hay varios temas que, en base a nuestro conocimiento, no han sido del todo discutidos. La presente discusión no pretende ni ser exhaustiva, ni dejar los temas cerrados definitivamente, sino focalizar cuestiones de importancia para la implementación de QST a una semántica de sistemas cuánticos. Pensamos que lo presentado podría servir de motivación para reavivar las cuestiones fundamentales de QST y para que otros autores interesados continúen desarrollando estas líneas. Estableceremos un fuerte vínculo entre QST y RST y también presentaremos una topología de cerriabiertos basada en la *clausura* de quasets. Los resultados presentados en esta sección acerca de quasets complementarios, relaciones y quaset potencia son de fundamental importancia para poder desarrollar un marco Nmatricial sustentado en QST, que es el núcleo central del trabajo.

Originalmente, QST fue presentada como una teoría de conjuntos intensional. Es decir, como una teoría axiomática de conjuntos donde *ni las intensiones determinan unívocamente una extensión, ni las extensiones determinan de forma unívoca sus intensiones*. Su motivación se debe al comportamiento que presentan los entes cuánticos, que en determinadas circunstancias, parecieran venir representados por conjuntos intensionales. Esto está muy vinculado al problema de la identidad de los entes cuánticos. Como los entes cuánticos pueden ser considerados entes sin identidad, desafían el principio de Leibniz, la pretensión de rotularlos o ponerles nombres propios (designadores rígidos) pareciera no estar bien fundamentada. Según Dalla Chiara y Toraldo Di Francia, como los entes cuánticos son principalmente entes nomológicos, son mejor capturados por las descripciones intensionales (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993):

> *The lack of proper names is due fundamentally to the fact that the objects of microphysics are nomological. All their characteristics are fixed by physical law and are identical for objects of one and the same kind. As far as we know today, one electron is identical to another electron, one proton to another proton, and so on.*

Como dicen sus autores, la intensión de un término siempre determina, al menos en principio, una extensión para el término, pero al contrario de lo que pasa en la semántica *standard*, esta extensión no será necesariamente única. Por ejemplo, una vez estipulada la intensión del término *electrón*, tenemos la posibilidad de reconocer, por medios teóricos o experimentales, si un sistema físico dado es una colección de electrones o no; en caso afirmativo, también podemos enumerar todos los estados cuánticos disponibles en él. De hecho, podemos hacerlo de varias maneras diferentes. Para ejemplificar, los autores toman el caso del espín. Si consideramos a los electrones definidos por $s = 1/2$, $m = 9{,}1\ 10^{-28}g$, $q = 4{,}8\ 10^{-10}e.s.u.$,

> *we can choose a z-axis and state how many electrons have $s_z = +1/2$ and how many have $s_z = -1/2$. But we could instead refer to the x-axis, or the y-axis, or any other direction, obtaining different sets of quantum states, all having the same cardinality. We thus arrive at a situation, which is usually believed to be impossible in classical semantics: different extensions can correspond to one and the same intension. Of course, the reverse situation of one and the same extension corresponding to different intensions is trivially possible, as in classical semantics (for instance, instead of giving the mass of a particle, one could give its rest energy).*

Esta particularidad de las colecciones de entes cuánticos de admitir *diferentes extensiones compatibles con una intensión dada es una de las principales motivaciones* *de la teoría*. Los sistemas de microobjetos presentan un comportamiento irreduciblemente intensional: generalmente no determinan extensiones precisas y no son determinadas por ellas. En consecuencia, una característica básica de QST será una fuerte violación del principio de extensionalidad. Por otro lado, no está de más observar que $\mathfrak{Q}$ también presenta cierto grado de no extensionalidad. En (Dalla Chiara et al. 1998), la teoría $\mathfrak{Q}$ (llamada S** es ese artículo) representa una especie de teoría *semiextensional*, ya que, en cierto sentido, las colecciones de microobjetos no están determinadas por sus elementos. No se puede distinguir un qset dado de otro qset que se ha obtenido intercambiando los elementos de la colección anterior con "otros" elementos indistinguibles. También en (do Nascimento et al. 2011) se llama la atención acerca de la semiextensionalidad de $\mathfrak{Q}$ observando que un qsets puede ser interpretado como una *colección* que se encuentra entre su quasiextensión y su *nube*, o sea, el qset de los 'elementos potenciales' de él.[6]

3.1. Cardinalidad en QST

Otro punto de importancia que debe destacarse del ejemplo anterior es la cardinalidad. Como para cada contexto, una dada intensión determina una extensión diferente, pero con la misma cardinalidad, los autores proponen, como una de sus características, que los quasets admitan una cardinalidad determinada. Esto es, a cada quasets se le asigna un único número cardinal, de forma tal que para el caso clásico, coincida con la asignación en ZF (axioma 2.10). Sin embargo, motivados también por los sistemas cuánticos, podríamos desear representar colecciones de entes cuánticos sin número definido de elementos. Si así fuera, deberíamos cambiar el axioma de cardinalidad (2.9) para que estén permitidos quasets sin un cardinal definido. Un ejemplo relevante en física, que tiene aplicaciones en la teoría de la información cuántica, es el de los estados coherentes del campo electromagnético. Estos estados se escriben como una superposición coherente estados con diferentes números de fotones:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n\rangle \tag{10}$$

donde los estados $|n\rangle$ son autoestados del operador número de partículas, es decir: $a^{\dagger}a|n\rangle = n|n\rangle$. De acuerdo a la interpretación estándard, no es posible asignarle un número de fotones definido de forma consistente previo a la medición, dado que $|\Psi\rangle$ no es autoestado del operador número de partículas.

> Observación: es interesante observar que en la teoría de quasisets $\mathfrak{Q}$ ha pasado algo similar. Desde sus primeras axiomatizaciones (Krause 1992) hasta algunas muy recientes (Krause 2020), las mismas no permitían quasisets con número no determinado de elementos. Muy recientemente (Holik et al.

2022), la axiomática se ha generalizado para admitir la existencia de quasi-sets sin una cardinalidad definida, con la finalidad de poder modelar sistemas cuánticos que se encuentren en superposición de estados con diferentes número de ocupación (ver también Krause 2020). Que algo del estilo no haya sucedido aún en QST puede deberse a que no se haya publicado tanto material sobre esta temática. Según sus fundadores, *Las clases físicas y los sistemas compuestos en QM parecen compartir algunas características que son características de las entidades intensionales. Además, la relación entre intensiones y extensiones se comporta de manera muy diferente a las situaciones semánticas clásicas. En general, no se puede decir que una noción intensional cuántica determine únicamente una extensión correspondiente* (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993). Lo que uno podría preguntarse a esta altura es: ¿por qué si estas nociones intensionales no determinan sus extensiones, deberían, en cambio, determinar necesariamente sus cardinalidades? Pensamos que es igualmente compatible con la esencia de la teoría admitir la existencia de quasets sin una cardinalidad definida. Estos temas deberán ser abordados con mayor detalle en trabajos futuros.

Si no va contra el espíritu original de QST admitir ciertas "colecciones" de entes cuánticos sin cardinal definido, podemos expresar esta posibilidad en un axioma. Por supuesto, los axiomas de cardinalidad deben empalmar bien con lo que sabemos de ZF, ya que en QST todos quasets que coinciden con su *qextensión* forman la copia interna de los conjuntos clásicos. Siguiendo lo propuesto en (Holik et al. 2022) para el caso de $\mathfrak{Q}$, proponemos como candidato a reemplazar al axioma (2.9):

Axioma 3.1.

$$\forall_Q x \exists_Z y(y = qcard(x)) \longrightarrow \exists! y(card(y) \wedge y = qcard(x) \wedge (Z(x) \longrightarrow y = card(x)))$$

Si el quaset x tiene un cuasicardinal, entonces su (único) cuasicardinal es un cardinal (definido en la parte *clásica* de la teoría) y coincide con el cardinal de x stricto sensu si x es un conjunto. Como se recordó anteriormente, este axioma no garantiza que todo quaset tenga un cuasicardinal bien definido. Por supuesto, si se opta por el nuevo axioma en, reemplazo de 2.9, los restantes axiomas sobre cuasicardinales (2.10,2.11, 2.12) deben ser adaptados de la misma forma.

3.2. Quaset potencia, quaset par y urelementos

Pasemos a analizar ahora el axioma 2.1. Es curioso que este axioma sea compartido tanto por $\mathfrak{Q}$ como por QST (no es el único). Es más, en (Dalla Chiara et al. 1998), luego de ya haber presentado la teoría $\mathfrak{Q}$, sus autores presentan este axioma como el primero de QST explicitando *like in S*** (recordar que en este artículo se llama así a $\mathfrak{Q}$). Nosotros queremos destacar que, a pesar de que sintácticamente ambos expresiones coincidan, su significado no es el mismo. Esto se debe a que $\mathfrak{Q}$ y QST no comparten exactamente el mismo lenguaje. Veamos un poco más detalladamente esto.

En QST, este axioma podría escribirse de forma equivalente como:

Axioma 3.2. (equivalente 2.1)

$$\forall x \forall y(\neg Q(y) \longrightarrow \neg(x \in y))$$

Y por definición 2.1, esto es equivalente a

$$\forall x \forall y(O(y) \longrightarrow \neg(x \in y))$$

Pero a diferencia de lo que pasa en $\mathfrak{Q}$, en QST esto *no es equivalente* a

$$\forall x \forall y(O(y) \longrightarrow (x \notin y))$$

Por lo tanto, el significado que cobra este axioma en cada teoría es diferente. En $\mathfrak{Q}$ asegura que si algo es un urelemento, entonces ningún ente puede pertenecer a él. Pero en QST, este axioma no es tan fuerte. Sólo puede asegurarnos que si algo es un urelemento, ningún ente puede pertenecerle con certeza. Pero eso no implica que, por decirlo de alguna manera, tal urelemento esté *vacío*. Podría darse, por ejemplo, el siguiente caso:

$$\exists x \exists y(O(y) \land x \in^{-} y) \tag{11}$$

Es decir, que a ciertos urelementos pertenezcan de forma indeterminada o débil algunos entes. No creemos que una situación así sea completamente no deseable en la física cuántica; las *cosas del mundo, como sabemos, están constantemente intercambiando entidades cuánticas con otras cosas y con el ambiente*. Tiene sentido decir que alguna cosa pueda ser un *elemento en potencia* de un quaset o de un urelemento.

También podría darse el siguiente caso,

$$\exists x \exists y(O(x) \land O(y) \land x \in^{-} y).$$

De esta forma, la cadena de pertenencias indeterminadas podría seguir *ad infinitum*. Podría también investigarse si estas particularidades pueden ser de utilidad para reflejar características de los sistemas de partículas virtuales o si repercuten sobre la buena fundación de los quasets. Como puede notarse, nosotros no hemos impuesto un axioma de *buena fundación* para quasets. Además, desde un punto de vista matemático, este hecho deja entrar la posibilidad de discutir el sentido de una *mereología cuántica*, esto es, una lógica de las totalidades y de sus partes, adecuada para tratar situaciones cuánticas. Recomendamos (Krause 2012; 2017) al lector interesado. Como, por el momento, nuestros intereses no vienen por ese lado, dejaremos la problemática abierta para futuras investigaciones.

Conjunto Potencia

Cuando en las secciones próximas estemos discutiendo los conjuntos de interpretación para los conectivos Nmatriciales, va a entrar en juego el conjunto potencia del quaset de valores de verdad, $\mathscr{P}(V^q)$. Por lo tanto, encontramos conveniente decir algunas palabras al respecto, ya que, no sólo no contamos en la axiomatización original de QST con un axioma de conjunto potencia, sino que el tema no fue prácticamente tratado. Para justificar físicamente la existencia de subquasets de un dado quaset, en (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993), sus autores expresan:

> *It is intriguing to note that there are even 'subsets' inside the 'set', each one with its own cardinality. For example, you can say that inside a sodium atom there are two electrons in the shell Is, two electrons in 2s, six electrons in 2p, one electron in 3s. Thus there is a sort of isolation procedure. You can state a property (e.g. having the quantum number f = 1) and you can tell how many electrons form the 'subset' having that property (six), even if you cannot distinguish those electrons from all the others!*

Es decir, estaría respaldado físicamente el uso de ciertos subquasets de estados cuánticos. Por lo tanto, la existencia de estos subquasets no debería contradecir la axiomática de QST. El inconveniente es que, sólo con lo dicho hasta aquí, si quisiéramos independizarnos de la interpretación física (para generalizar, por ejemplo, a quasets de valores de verdad), no tendríamos garantizada la existencia de todos los subquasets posibles. Por supuesto, podríamos de forma intensional definir un quasets que tenga exactamente un electrón de cada orbital (aunque no sepamos distinguir cuál). Como tiene sentido físico que podamos aislar subconjuntos de entes cuánticos de una colección dada (y recordando la fuerte motivación cuántica que tienen las teorías $\mathfrak{Q}$ y QST), sería lógico que podamos incluir en la axiomática de QST un axioma que garantice la existencia del conjunto potencia, de la misma forma que se hace en la teoría de quasisets $\mathfrak{Q}$ (o ZF). A la hora de definir la valuaciones Nmatriciales en QST (sección 4.5), será necesario contar con este axioma. Presentamos un par de candidatos para cumplir tal propósito. La conveniencia en su elección dependerá de los propósitos que se persigan en el futuro.

Axioma 3.3. $\forall_Q x \exists_Q y \forall z(\neg(z \notin y) \longleftrightarrow (z \subseteq x) \wedge (z \subseteq qext(x) \longrightarrow z \in y))$

Denotaremos al quaset potencia mediante $\mathscr{P}_q(x)$. Cuando x es un conjunto clásico ($x = qext(x)$), este axioma prohibe que el quaset potencia admita alementos con pertenencia indetermindada. Si $x = qext(x)$ e $y = \mathscr{P}_q(x)$, entonces (utilizando las implicaciones del axioma anterior)

$$z \in^- y \equiv \neg(z \in y) \wedge \neg(z \notin y) \Longrightarrow \neg(z \notin y) \Longrightarrow z \subseteq x \Longrightarrow z \subseteq qext(x) \Longrightarrow z \in y$$

Por lo tanto, suponer pertenencia indeterminada a y nos compromete con la pertetencia con certeza a y. Esto es, no pueden existir elementos con pertenencia indeterminada al quaset potencia de un conjunto clásico. Hasta acá, el axioma está en concordancia con lo esperado clásicamente. Pero veamos ahora el siguiente caso: sean x, w dos quasets, tales que no coincidan con sus respectivas *qextensiones* (es decir, x y w no son conjuntos clásicos), pero que cumplan

$$qext(x) = \overline{w}.$$

Donde la barra sobre w denota la clausura del quaset w, ver ecuación (12) y definición 3.1. Por lo tanto, si quisieramos encontrar el conjunto potencia para el quaset x, por el axioma 3.3, se debería satisfacer

$$\forall z(\neg(z \notin y) \longleftrightarrow (z \subseteq x) \wedge (z \subseteq \overline{w} \longrightarrow z \in y))$$

Debido a que $w \subseteq \overline{w}$ (se sigue de (12)), del axioma se desprende que $w \in y$. Es decir, el candidato a quaset potencia de x incluye a w (quaset no clásico) dentro de su *qextensión* (ya que $w \in y \longleftrightarrow w \in qext(y)$). Esto significa un apartamiento a lo esperado clásicamente ($qext(y) \neq \mathscr{P}(qext(x))$). También debemos observar que este axioma no determina de manera unívoca al quaset potencia. Veremos en seguida que esto no representa un inconveniente serio para nuestros objetivos.

El siguiente axioma pueden considerarse otra alternativa para el quaset potencia.

Axioma 3.4. $\forall_Q x \exists_Q y[\forall z(\neg(z \notin y) \longleftrightarrow (z \subseteq x) \wedge Z(x) \longrightarrow y = \mathscr{P}(x)]$

Donde $\mathscr{P}$ denota el conjunto potencia en el sentido de ZF. Si x no es un conjunto clásico, el axioma 3.4 no determina la *qextensión* del conjunto potencia de manera unívoca. Esto se debe a que no quedan especificado cuáles de los subquasets de x pertenecen con seguridad a y. Lo que significa que, en el caso más general, no queda definido el quaset potencia de manera unívoca. En lo que respecta a nuestros objetivos semánticos, esto no generará inconvenientes. Algo similar pasa en $\mathfrak{Q}$, donde tampoco se puede probar que este conjunto sea único (ver Krause 2020). Para aclarar un poco más esto, y ver qué clase de indefinición admite el quaset potencia, analicemos un poco más el axioma anterior. Como el primero de los conyuntos es equivalente a $z \notin y \longleftrightarrow \neg(z \subseteq x)$, para cada quaset x, queda absolutamente definido qué entes con seguridad no pertenecen al quaset potencia y. La no unicidad en el quaset potencia se debe a los entes que tienen pertenencia indeterminada a y, por los cuales $qext(y)$ no queda unívocamente definido. Es decir, si y e y' son dos quasets que verifican las condiciones del axioma anterior (dos quasets potencia de x), entonces sólo se diferencian en que algunos elementos que tienen pertenencia indeterminada a uno de ellos pertenece con seguridad al otro (o viceversa). Los casos extremos serían cuando todos pertenecen con seguridad, por ejemplo, a y, y de forma indeterminada a y'. Los siguientes tres axiomas (no pertenecientes a la axiomatización original de QST) nos permitirán, por un lado, caracterizar la no unicidad, y por otro lado, definir más quasets legales.

Axioma 3.5. Estandarización parcial.

$$\forall_Q x \forall z \exists_Q y (z \in^- x \longrightarrow (z \in y) \wedge (x \subseteq y) \wedge qext(y) = qext(x) \cup \{z\} \wedge \overline{x} = \overline{y}))$$

Podemos entender la estandarización parcial como un proceso mediante el cual un elemento que tiene pertenencia indeterminada al quaset original x pasa a pertenecer con certeza a quaset y, que es una estandarización parcial de x. Este proceso puede ser repetido para cada elemento que tenga pertenencia indeterminada al quaset x, culminando cuando se llega a la *clausura* del quaset. De alguna manera, este axioma permite generar todos los quasets que se encuentran entre $qext(x)$ y $\overline{x}$. Al proceso inverso, en el cual elementos que tienen pertenencia con certeza a x pasan a pertenecer indeterminadamente al nuevo quaset y, lo llamamos *antiestandarización parcial*. Este axioma es el primero en garantizarnos la existencia de quasets que no sean clásicos.

Axioma 3.6. Antiestandarización parcial.

$$\forall_Q x \forall z \exists_Q w (z \in x \longrightarrow z \in^- w \wedge w \subseteq x \wedge qext(x) = qext(w) \cup \{z\} \wedge \overline{x} = \overline{w})$$

Axioma 3.7. Clausura. Todo quaset tiene una única clausura, donde la clausura de un quaset dado x es el único quaset (y) que con certeza no contiene a todos los elementos que con certeza no pertenecen a x y con certeza contiene a todas las otras entidades:

$$\forall_Q x \exists_Q ! y \forall z ((z \notin y \longleftrightarrow z \notin x) \wedge (z \in y \longleftrightarrow \neg(z \notin x)))$$

Como puede notarse, este axioma es un dual del axioma que permitió definir la *qextensión* de un quaset (2.5). Por lo tanto, estamos en condiciones de presentar la siguiente definición.

Definición 3.1. *Clausura* de un quaset. Para cualquier quaset x, definimos su clausura, denotada por $\overline{x}$, como el quaset y que cumple lo siguiente:

$$\forall x \forall y (y = \overline{x} \longleftrightarrow \forall z ((z \notin y \longleftrightarrow z \notin x) \wedge (z \in y \longleftrightarrow \neg(z \notin x))))$$

Cuando un quaset no queda definido de forma unívoca, como observamos, por ejemplo, en el caso del quaset potencia, la no univocidad se debe a que el quaset puede encontrarse entre su *qextensión* y su *clausura*. Es decir, queda definido a menos de esta posibilidad que tiene de variar entre estos dos quaset asociados de forma única.

Una posibilidad sería interpretar cada quaset como la colección de todos estas posibles variaciones que van desde su *qextensión* hasta su *clausura*. Una interpretación de este estilo a veces es utilizada también Rough Sets (Pawlak y Skowron 2007a). No necesitamos comprometernos con esta interpretación, aunque puede ser tenida en cuenta.

Con lo dicho anteriormente, dado un quasets A^q, se cumple:

$$qext(A^q) \subseteq A^q \subseteq \overline{A^q} \tag{12}$$

Puede verse fácilmente que si A^q es un quaset clásico ($Z(A^q)$), es decir, idéntico a su *qextensión*, entonces

$$qext(A^q) = A^q = \overline{A^q}.$$

La ecuación (12) tiene una consecuencia muy particular. Expresa que los quasets clásicos (conjuntos) pueden tener incluidos quasets no clásicos. Esto es consecuencia directa de la inclusión de quasets y la definición de *clausura*, que siempre es un conjunto clásico. Esta particularidad de los quasets repercute directamente sobre las diferentes posibilidades a la hora de definir el quaset potencia. También refleja una diferencia importante de QST con respecto a $\mathfrak{Q}$, donde los qsets clásicos no pueden contener qsets que no sean clásicos.

3.3. Conjuntos complementarios

En esta sección, discutiremos un tema que también ha sido, según nuestro conocimiento, muy poco tratado en la literatura: el complemento de un quaset. Pondremos de manifiesto algunas propiedades llamativas de los quasets complementarios y les asociaremos una interpretación física en los sistemas cuánticos. En el siguiente apartado nos adentraremos en el tema de las relaciones entre quasets. Como ya se ha nombrado, ambos temas serán de importancia a la hora de construir una semántica Nmatricial basada en QST. El complemento de un quaset va a ser de importancia a la hora de definir los conjuntos de valores designados y no designados de nuestra semántica, aunque no sea estrictamente necesario que estos conjuntos sean complementarios. Las relaciones van a entrar en juego, como funciones, de las mano de las valuaciones de nuestro lenguaje. También pueden ser de importancia si uno quisiera sentar las bases para una semántica relacional basada en QST.

Para caracterizar al complemento de quasets, presentamos el siguiente axioma:

Axioma 3.8. Sean A^q y x quasets, tales que $x \subseteq A^q$. El complemento de x relativo a A^q, denotado por x^c_A (prescindiremos del subíndice A cuando quede claro el contexto), queda caracterizado por:

$$x \sqcup x^c = \overline{A^q} \quad \wedge \quad x \sqcap x^c = \emptyset \quad \wedge \quad (x^c)^c = x \tag{13}$$

$$(qext(x))^c = qext(x^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} \tag{14}$$

Donde los primitivos $\sqcap$ y $\sqcup$ son los introducidos en 2.7 y 2.13. Diremos algunas palabras sobre la unión de quasets para luego adentrarnos en la conjunción débil. ¿Cómo debe interpretarse en términos semi-extensionales la unión que aparece en el axioma (3.8)? Está claro que para quasets que coincidan con su *qextensión* debe coincidir con la unión de ZF. También queda claro que la forma en la cual interpretemos esta operación repercute directamente sobre nuestra concepción de quasets complementarios en QST. Aunque en la formulación original de QST no exista un axioma de unión para quasets, sus autores han analizado indirectamente algunas posibilidades (ver sección 9 de Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993). Al analizar el *Principio de identidad de los indiscernibles* de Leibniz (LP) los autores se preguntan *¿Pero cómo (en determinadas circunstancias) los fermiones pueden comportarse al mismo tiempo como partículas indistinguibles y leibnizianas?* Donde se entiende que las partículas son *leibnizianas* si satisfacen LP; es decir, si dos partículas son distintas, existe una propiedad que las distingue. Intuitivamente, uno podría observar que: si dos electrones (según LP) se distinguen por al menos una propiedad P, entonces se distinguen y, por lo tanto, no pueden ser indistinguibles. Esta observación sería correcta en la lógica clásica. Sin embargo, en lógica cuántica puede suceder que una oración como $\exists P(P(a) \wedge \neg P(b))$ sea verdadera, incluso si cualquier elección posible de P no satisface la fórmula $P(a) \wedge \neg P(b)$. Este análisis nos llevará a sacar algunas conclusiones relativas a la unión de quasets.

Los autores consideran los dos electrones de un átomo de Helio en su estado fundamental. Sean a, b nombres para los dos electrones del átomo de Helio. P^+ representa la propiedad *tener espín up (en cierta dirección)* y P^-, *tener espín down (en la misma dirección)*. La siguiente sentencia es físicamente verdadera

$$(P^+(a) \wedge \neg P^+(b)) \vee (P^-(a) \wedge \neg P^-(b)).$$

Por lo tanto, también es cierta la siguiente instancia de LP:

$$\neg(a = b) \longrightarrow \exists P \quad (P(a) \wedge \neg P(b)).$$

No obstante, el estado de verdad de cada miembro de la disyunción $(P^+(a) \wedge \neg P^+(b)) \vee (P^-(a) \wedge \neg P^-(b))$ está indeterminado, y esto es válido para cualquier otra elección posible de P. [7]

¿Qué nos deja el ejemplo analizado con respecto a la unión de quasets? Si tomamos el comportamiento de la disyunción como guía en nuestra búsqueda de propiedades de la unión, podríamos decir que lo anterior justifica que al quaset unión puedan pertenecer con certeza elementos cuya pertenencia a cada uno de los quasets originales sea indeterminada. Queremos que nuestra propuesta sea compatible con esta opción. Si la pertenencia de un elemento es indeterminada a ambos quasets, podríamos tener tanto la posibilidad de que la pertenencia a la unión se dé con certeza como también de forma indeterminada. Por otro lado, mientras cada uno de los disyuntos de la proposición anterior está indeterminado, sabemos físicamente que no pueden estar determinados ninguno de los conyuntos. Esto es, si $(P^+(a) \wedge \neg P^+(b))$ está indeterminado, entonces tanto $P^+(a)$ como $\neg P^+(b)$ deben estarlo (que uno solo no esté determinado no tiene sentido físico). Lo que estará de acuerdo con lo que plantearemos sobre la conjunción débil.

Pasemos a reflexionar sobre la conjunción débil de (3.8). Una pregunta que podríamos hacernos es si aun admitiendo tanto x como x^c elementos en común con pertenencia indeterminada, no podría ser la conjunción débil de los mismos vacía. La conjunción débil podría seleccionar el criterio más débil de pertenencia a los conjuntos en todos los casos, menos en el que se dé la pertenencia indeterminada a ambos quasets. Caso en el cual la conjunción débil podría optar entre la pertenencia indeterminada o la no pertenencia. Por ejemplo, si un elemento perteneciese con seguridad a A^q, pero de forma indeterminada a B^q, entonces pertenecería de forma indeterminada a la conjunción débil. Pero si un elemento perteneciese a ambos quasets de forma indeterminada, entonces podríamos tener tanto una pertenencia indeterminada como una no pertenencia a la conjunción débil.

En conclusión, podríamos tener casos en donde la conjunción débil de quasets sea vacía, aun teniendo ambos quasets entes con pertenencia indeterminada en común, y también podrían existir casos donde a la conjunción pertenezcan de forma indeterminada algunos elementos que tengan pertenencia indeterminada a ambos quasets. En el límite clásico, ambos casos estarían de acuerdo con lo esperado. Para nuestros fines, bastaría con que se dé el primer caso al tratarse de complementos de quasets. Cuando en la sección 3.7.1 establezcamos una relación entre QST y Rough Sets (RST), veremos que este indeterminismo de la intersección entre rough sets, para el caso del tercer valor de pertenencia, es una de sus características. Tal propiedad queda explicitada en la Nmatriz característica de RST dada en la sección 6 de Avron y Konikowska (2004). Volveremos a destacar este punto en el apéndice A.

Sean A^q un quaset, que no coincida necesariamente con su *qextensión*, y $x \subseteq A^q$. ¿Qué podría decirse acerca de $(qext(x))^c$ de (14)? Para el caso clásico (conjuntos de ZF), nos gustaría que el complemento de la *qextensión* coincida con la *qextensión* del complemento. Pero en el caso general, esto no tiene que ser así necesariamente. Para el caso clásico, cuando $x = qext(x)$, el segundo quaset de la unión de (14) es vacío y tenemos que el complemento de la *qextensión* es igual a la *qextensión* del complemento. Nótese además que la unión es disjunta (en términos de $\sqcap$). En la sección 3.7.1 veremos que la relación planteada tiene una fuerte similitud con el comportamiento que los rough sets muestran en relación con su complemento.

Utilizando (3.8) para el caso especial donde $x = qext(x)$, tenemos que

$$qext(x) \sqcup (qest(x))^c = \overline{A^q}$$

Por 14, podemos escribirlo como

$$qext(x) \sqcup qext(x^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = \overline{A^q} \tag{15}$$

Que por el axioma 2.13, es igual a pedir que

$$qext(x) \cup qext(x^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = \overline{A^q} \tag{16}$$

Por otro lado, si aplicamos la condición (14) a x^c, en vez de a x, y usamos que $(x^c)^c = x$, tenemos que:

$$(qext(x^c))^c = qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x^c\} \tag{17}$$

Utilizando nuevamente la condición relativa a la unión de (3.8) obtenemos:

$$qext(x^c) \sqcup qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x^c\} = \overline{A^q} \tag{18}$$

O equivalentemente

$$qext(x^c) \cup qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x^c\} = \overline{A^q} \tag{19}$$

Comparando (16) y (19),

(20)

$$qext(x) \cup qext(x^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = qext(x^c) \cup qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x^c\}$$

Donde los primeros dos conjuntos de cada miembro de la igualdad son clásicos y, además, los conjuntos conectados mediante $\sqcup$ son disjuntos (su conjunción débil ($\sqcap$) es nula). Llegado este punto, vamos a pedir una condición extra, que será expresada oficialmente antes de terminar esta sección (condición vi) de 3.1), Esta condición establece que si x, y, w y z son quasets cualesquiera, entonces la siguiente inferencia es válida:

$$(x \sqcup y = w \sqcup z) \wedge (x = w) \wedge (x \sqcap y = \emptyset) \wedge (w \sqcap z = \emptyset) \Longrightarrow y = z$$

Por lo tanto, reemplazando en la expresión anterior x por $qext(x) \cup qext(x^c)$, al quaset y por $\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\}$, w por $qext(x^c) \cup qext(x)$ y, finalmente, z por $\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x^c\}$, obtenemos

$$\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x^c\} \tag{21}$$

Por la igualdad (20), considerando que la parte extensional de los quasets involucrados es la misma ($qext(x) \cup qext(x^c)$), no puede entonces no coincidir su parte no extensional. Esto está de acuerdo con la existencia de entes en común con pertenencia indeterminada a un quaset y a su complemento que nombramos anteriormente. Si, como acabamos de ver, las partes no extensionales de un quaset y su complemento deben coincidir, entonces el complemento debe quedar definido de forma única por las condiciones presentadas. Esto es, supongamos tener dos complementos, x_1^c y x_2^c, para un quaset dado x (relativos al mismo quasets A^q). Entonces, obtenemos las siguientes dos expresiones

(22) $x \sqcup x_1^c = \overline{A^q}; x \sqcap x_1^c = \emptyset; (x_1^c)^c = x; (qext(x))^c = qext(x_1^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\}$

(23) $x \sqcup x_2^c = \overline{A^q}; x \sqcap x_2^c = \emptyset; (x_2^c)^c = x; (qext(x))^c = qext(x_2^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\}$

De estas condiciones, y aplicando los razonamientos que nos llevaron a (21), obtenemos que

$$\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\} \tag{24}$$

$$\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_2^c\} \tag{25}$$

Por lo tanto,

$$\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\} = \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_2^c\} \tag{26}$$

Lo que significa que de existir dos complementos diferentes, los elementos con pertenencia indeterminada a los mismos deben coincidir. Esto sólo deja margen para que los complementos se distingan por su parte extensional, algo que contradice lo pedido para el caso en el cual los quasets son conjuntos clásicos, donde sabemos que el complemento es único. Es decir, si dos complementos de x no compartieran su parte extensional, no podrían tener ambos intersección vacía con x. Por lo tanto, las condiciones pedidas establecen la unicidad del complemento de quasets. En breve, para no dejar dudas, explicitaremos detalladamente esto último (razonamiento de 46 a (59)).

> *Observación*: esta particularidad del quaset complemento en QST, de permitir la existencia de elementos con pertenencia indetermindada tanto a x como a x^c, va a tener una interpretación física directa. Los sistemas cuánticos que puedan describirse como superposición de estados mutuamente excluyentes, por ejemplo de diferentes proyecciones de espín, van a poder interpretarse como elementos con pertenencia indeterminada a un cierto quaset y su complemento.

Puede observarse que si tomamos $x = A^q$, la ecuación (14) nos dice que (en el caso más general) $(qext(A^q))^c$ es un quaset no vacío con *qextensión* vacía. Algo que habíamos advertido que podía pasar y que está de acuerdo con la axiomática original. Volvamos a la ecuación 12 para analizar otras propiedades que de nuestra propuesta de complemento puedan desprenderse. Analicemos en qué se diferencian los siguientes complementos: el complemento de la *qextensión* de un quaset A^q, el complemento de A^q y el complemento de su *clausura*. Sea un quasets x, tal que:

$$qext(x) \subseteq x \subseteq \overline{x} \subseteq A^q.$$

Por el momento, supongamos que el quasets A^q es genérico.

Aplicando las ecuaciones 3.8 a $qext(x)$, tenemos que

$$qext(x) \sqcup (qext(x))^c = \overline{A^q} \tag{27}$$

$$qext(x) \sqcap (qext(x))^c = \emptyset \tag{28}$$

$$((qext(x))^c)^c = qext(x) \tag{29}$$

Si ahora aplicamos la condición 14 reemplazando el quaset x por $qext(x)$:

$$(qext(qext(x)))^c = qext((qext(x))^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- qext(x)\} \tag{30}$$

Como la *qextensión* de la *qextensión* de un quaset es igual a su *qextensión*, podemos simplificar el miembro izquierdo de la igualdad. Por otro lado, como $qext(x)$ no admite elementos con pertenencia indeterminada, el quaset derecho de la unión en el miembro derecho es vacío. Por lo tanto, tenemos que

$$(qext(x))^c = qext((qext(x))^c) \tag{31}$$

De esta última expresión se puede inferir que $(qext(x))^c$ es un conjunto clásico. Esto es, no puede admitir elementos con pertenencia indeterminada, ya que es igual a su propia *qextensión*. Esto viene en total concordancia con lo deducido anteriormente: *el quasets de elementos con pertenencia indeterminada debe ser común tanto al quaset original como a su complemento*. Reemplazando 31 en 27, obtenemos

$$qext(x) \sqcup qext((qext(x))^c) = \overline{A^q} \tag{32}$$

Si usamos el hecho de que $\sqcup$ coincide con la unión clásica para el caso de conjuntos, lo anterior es equivalente a

$$qext(x) \cup qext((qext(x))^c) = \overline{A^q} \tag{33}$$

Si ahora plicaremos los mismos razonamientos al quaset $\overline{x}$,

(34) $$\overline{x} \sqcup (\overline{x})^c = \overline{A^q}$$

(35) $$\overline{x} \sqcap (\overline{x})^c = \emptyset$$

(36) $$((\overline{x})^c)^c = \overline{x}$$

Aplicando la condición (14) a $\overline{x}$:

(37) $$(qext(\overline{x}))^c = qext((\overline{x})^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- \overline{x}\}$$

Como $qext(\overline{x}) = \overline{x}$ y el quaset derecho de la unión es vacío, tenemos que

(38) $$(\overline{x})^c = qext((\overline{x})^c)$$

Lo que permite concluir que también $(\overline{x})^c$ es un conjunto clásico. Reemplazando (38) en (34),

(39) $$\overline{x} \sqcup qext(\overline{x}^c) = \overline{A^q}$$

O equivalentemente

(40) $$\overline{x} \cup qext(\overline{x}^c) = \overline{A^q}$$

Comparando ahora (38) con (31) puede verse que: por ser tanto $\overline{x}^c$ como *qext(x)*^{c} conjuntos clásicos, tales que $qext(x) \subseteq \overline{x}$,

$$qext(\overline{x}^c) = \overline{x}^c \subseteq (qext(x))^c = qext((qext(x))^c)$$

Veamos ahora qué pasa cuando aplicamos idénticos razonamientos al quaset x.

(41) $$x \sqcup x^c = \overline{A^q}$$

(42) $$x \sqcap x^c = \emptyset$$

(43) $$(x^c)^c = x$$

Aplicando la condición (14) a x:

(44) $$(qext(x))^c = qext(x^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\}$$

Si comparamos esta última expresión con (31), obtenemos

$$qext(x^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x\} = qext((qext(x))^c) \tag{45}$$

Lo que pone en evidencia la relación que existe entre la unión de quasets y la estandarización de quaset. Las dos *qextensiones* involucradas en la igualdad anterior admiten sólo pertenencias determinadas. Sin embargo, el quaset derecho de la unión tiene los elementos que pertenecen de forma indeterminada al quaset x. ¿Qué pasa con esos elementos que pertenecen de forma indeterminada? En este caso (caso unión entre conjuntos clásico y quaset) la unión los está transformando en elementos que tienen pertenencia determinada. Esto es, la unión de quasets, en determinadas circunstancias, *puede cumplir el rol de estandarizar quasets*.

Por último, antes de terminar esta sección, volvamos a terminar el análisis relativo al supuesto caso de tener dos complementos distintos para un quaset dado. En (26) vimos que un quaset y su complemento deben compartir los elementos con pertenencia indeterminada. Detallaremos ahora el comportamiento de sus *qextensiones* para concluir que el complemento de un quaset queda determinado de forma única por las condiciones impuestas. Volviendo a las ecuaciones (22), (23) y aplicando la condición relativa a la intersección de complementos a $qext(x_1^c)$, tenemos

$$qext(x_1^c) \sqcap (qext(x_1^c))^c = \emptyset \tag{46}$$

Si aplicamos (31) para el caso $x = x_1^c$, obtenemos que ambos conjuntos son clásicos. Por lo tanto, nos queda que

$$qext(x_1^c) \cap ((qext(x_1^c))^c) = \emptyset \tag{47}$$

Razonando de manera idéntica para x_2^c:

$$qext(x_2^c) \cap ((qext(x_2^c))^c) = \emptyset \tag{48}$$

Aplicando la condición (14) a cada uno de las expresiones de la derecha de la intersección en las últimas dos ecuaciones:

$$qext(x_1^c) \cap [qext((x_1^c)^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\}] = \emptyset \tag{49}$$

$$qext(x_2^c) \cap [qext((x_2^c)^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_2^c\}] = \emptyset \tag{50}$$

Aplicando que $(x_1^c)^c = (x_2^c)^c = x$, además del resultado ya probado

$$\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\} = \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_2^c\},$$

podemos escribir las dos ecuaciones anteriores como

(51) $$qext(x_1^c) \cap [qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\}] = \emptyset$$

(52) $$qext(x_2^c) \cap [qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\}] = \emptyset$$

Nótese que la intersección que aparece es la clásica, porque ya hemos probado que las expresiones entre corchetes no admiten pertenencia indeterminada.

Ahora repetiremos el mismo procedimiento, pero partiendo de la condición del complemento relativa a la unión, esto es, repoduciendo el mismo razonamiento a partir de $qext(x_1^c) \sqcup ((qext(x_1^c))^c) = \overline{A^q}$ (en vez de $qext(x_1^c) \sqcap ((qext(x_1^c))^c) = \emptyset$):

(53) $$qext(x_1^c) \cup (qext(x_1^c))^c = \overline{A^q}$$

(54) $$qext(x_2^c) \cup (qext(x_2^c))^c = \overline{A^q}$$

Note que, al usar la unión $\cup$, ya hemos utilizado la información de que cada uno de los conjuntos es clásico. Aplicando la condición (14) a cada uno de las expresiones de la derecha de la unión en las últimas dos ecuaciones:

(55) $$qext(x_1^c) \cup [qext((x_1^c)^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c\}] = \overline{A^q}$$

(56) $$qext(x_2^c) \cup [qext((x_2^c)^c) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_2^c)\}] = \overline{A^q}$$

Usando que $(x_1^c)^c = (x_2^c)^c = x$ y que

$$\{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c)\} = \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_2^c)\}$$

(57) $$qext(x_1^c) \cup [qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c)\}] = \overline{A^q}$$

(58) $$qext(x_2^c) \cup [qext(x) \sqcup \{y \in \overline{A^q} : y \in^- x_1^c)\}] = \overline{A^q}$$

Usando la parte clásica de QST, a partir de (51),(52), (57) y (58) puede deducirse que

(59) $$qext(x_1^c) = qext(x_2^c)$$

Con lo cual, de existir dos complementos distintos, no pueden diferir en su parte extensional. Y como ya mostramos que deben compartir sus elementos con pertenencia indeterminada, entonces no pueden diferir en absoluto. Por lo tanto, el *complemento debe ser único*.

3.4. Relaciones

A la hora de establecer las bases formales de una semántica basada en QST, vamos a precisar que esté garantizada la existencia de relaciones y funciones. Pero en su formulación original, QST no cuenta con un axioma de par, que permita fundamentar las relaciones entre quasets. Por lo tanto, en esta sección, presentamos algunas alternativas en esta dirección, de forma tal de que el objetivo principal del trabajo quede fundamentado de forma adecuada.

Por poner un ejemplo, no queda claro cómo definir de forma conveniente el producto $A^q \times A^q$. Note que, al margen del axioma de par, una definición del estilo

$$A^q \times A^q = \{(x,y) : x \in A^q \wedge y \in A^q\} \tag{60}$$

sería del todo obsoleta, ya que, debido a que $x \in A^q \longleftrightarrow x \in qext(A^q)$, se tendría que

$$\begin{aligned} A^q \times A^q = \{(x,y) : x \in A^q \wedge y \in A^q\} = \\ \{(x,y) : x \in qext(A^q) \wedge y \in qext(A^q)\} = qext(A^q) \times qext(A^q) \end{aligned} \tag{61}$$

Colapsando el producto de quasets en un conjunto extensional clásico. Se presentan, en principio, diferentes caminos a ser explorados. Debido a que más adelante vamos a mostrar una fuerte relación entre QST y RST, una alternativa podría ser seguir los pasos que permiten definir las relaciones en ésta última (Pawlak 1986). Por otro lado, si uno definiese el producto de quasets como

$$A^q \times B^q = \{(x,y) : \neg(x \notin A^q) \wedge \neg(y \notin B^q)\}, \tag{62}$$

coincidiría con lo deseado cuando se trate con conjuntos de ZF, pero permitiría que los elementos con pertenencia débil o indeterminada entren en juego para el caso general. Esto es, el producto así definido ya no colapsaría en un conjunto clásico. Además, de considerarlo necesario, podría imponerse la siguiente restricción:

$$qext(A^q \times B^q) = qext(A^q) \times qext(B^q) \tag{63}$$

Según lo anterior, el dominio de una relación $\mathscr{R} \subseteq A^q \times B^q$ estaría formado por todos los x, tales que $\neg(x \notin A^q)$. Por supuesto, sin un axioma del estilo par, no tendríamos garantizada la existencia de tal quaset para el caso general. Por esta razón proponemos el siguiente axioma, que extiende la axiomática original de QST:

Axioma 3.9. $\forall x \quad \forall y \quad \exists_Q z \ (\neg(x \notin z) \wedge \neg(y \notin z))$

Analicemos brevemente este axioma. Nos dice que para cuales quiera dos entes x e y, sean quasets o urelementos, existe un quaset z para el cual se cumple que cada uno o bien pertenece con seguridad al quaset z o bien tiene pertenencia indeterminada. No exige que tal quaset sea único ni tampoco explicita nada acerca de su *qextensión*. Si tanto x como y perteneciesen con certeza al quaset, sería de esperar que su quasi-cardinalidad fuera mayor o igual que 2. Pero ambos podrían tener pertenencia indeterminada a z (junto con otros elementos). Denotaremos por $\{x, y\}_A$ un quaset que satisface el axioma anterior y cuya *qextensión* tiene a lo sumo a x, y. Lo que no implica $x \in \{x, y\}_A$, ni $y \in \{x, y\}_A$, ya que ambos podrían tener pertenencia indeterminada. Pero sí implica que si $x' \neq x$ y $x' \neq y$, entonces $\neg(x' \in \{x, y\}_A)$. El subíndice A es debido a que vamos a relativizar el par no ordenado a un conjunto clásico A, tal que tanto los elementos que pertenezcan con certeza al par como los que pertenezcan de forma indeterminada al mismo sean elementos de A (si A no fuera clásico, podríamos trabajar con su *clausura*). Por lo tanto, tendremos que $\{x, y\}_A \subseteq A$ y $qext(A) = A$. Esto lo hacemos con el fin de tener un poco más de control sobre los elementos que pueden pertenecer de forma indeterminada. En (Krause 2020), puede verse un tratamiento similar para el caso de los pares no ordenados de $\mathfrak{Q}$. Por otro lado, el conjunto A que tenemos como fuente de donde tomamos elementos puede relacionarse directamente con lo que en la sección 3 de (do Nascimento et al. 2011) se denomina la *nube* (cloud) del qset. Este concepto de $\mathfrak{Q}$ puede ser clave a la hora de establecer un vínculo importante entre QST y $\mathfrak{Q}$. En vista de lo nombrado más arriba acerca de la clausura de un quaset, podemos afirmar:

(64) $$qext(\{x, y\}_A) \subseteq \{x, y\}_A \subseteq \overline{\{x, y\}}_A \subseteq A$$

Definición 3.2. Par ordenado.

$$(x, y)_A := \{\{x\}_A, \{x, y\}_A\}_{\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))}$$

Donde el quaset potencia es el discutido en 3.4 (o 3.3). Ahora podemos introducir el producto cartesiano de dos quasets. Una vez más, debemos recordar que sólo tratamos con pares ordenados en relación con algún quaset dado.

Definición 3.3. Producto cartesiano.

$$u \times v := \{(x, y)_{(\overline{u \sqcup v})} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\overline{u \sqcup v})) : \neg(x \notin u) \wedge \neg(y \notin v)\}$$

De esta manera, decimos que el quaset $\mathscr{R}$ es una *qrelación* entre los quasets A^q y B^q si

(65) $$\mathscr{R} \subseteq A_q \times B_q$$

Definición 3.4. Quafunción. Decimos que f es una *qfunción* (o quafunción) entre A^q y B^q si f es una qrelación entre estos conjuntos, tal que

$$\forall x\ \exists y \quad (\neg(x \notin A^q) \quad \longrightarrow \neg(y \notin B^q)) \quad \wedge \\ \forall x\ \forall y\ [\neg((x,y) \notin f) \wedge \neg((x,z) \notin f) \longrightarrow y = z)]$$

En algunos casos, podría necesitarse que la función relacione elementos de pertenencia indeterminada con otros elementos de pertenencia indeterminada. Nosotros por ahora vamos a imponer una restricción un poco más débil:

(66) $$qext(A^q \times B^q) = qext(A^q) \times qext(B^q)$$

Como un elemento pertenece a un quasets si y sólo si pertenece a su *qextensión*, la condición anterior asegura que $(x,y) \in A^q \times B^q \longleftrightarrow x \in A^q \wedge y \in B^q$. Por lo tanto, si x o y tienen pertenencia indeterminada a su respectivo quaset, entonces el par ordenado no podrá pertenecer con certeza a la qrelación (o qfunción). Esto es, no pertenecerá al la *qextensión* de la misma. Nuestra definición también permite establecer relaciones y funciones entre conjuntos estándar (ZF) y quasets. Veamos esto un con un ejemplo.

Sean $\{1,-1\}$ un conjunto clásico y $\{x,y\}_A$ un quaset par no ordenado relativizado a cierto conjunto clásico A, tal que se cumpla: $x \in^- \{x,y\}_A$ e $y \in^- \{x,y\}_A$, es decir, $qext(\{x,y\}_A) = \emptyset$. Nuestra definición de qfunción permite la existencia de $f : \{1,-1\} \to \{x,y\}_A$, tal que $(1,x)_A \in^- f$ y $(1,y)_A \in^- f$. Lo que significa que ambos pares ordenados pertenecen de forma indeterminada a la relación. Como uno de los conjuntos involucrados en la función tiene *qextensión* vacía, por la restricción establecida sobre su *qextensión* (66), sabemos que la relación debe tener una *qextensión vacía*. Lo que significa que los otros pares involucrados, $(-1,x)_A$ y $(-1,y)_A$, deben pertenecer (a lo sumo) de forma indeterminada a f. Si identificamos el conjunto clásico con las proyecciones de espín a lo largo de un eje y el quaset con los electrones del átomo de Helio, la función recién establecida representa la superposición de estados de ambos electrones en sus proyecciones de espín. Lo que se vincula con la imposibilidad de saber antes de una medición qué electrón está con espín hacia arriba y qué electrón tiene proyección hacia abajo. Por ser una función, una vez que se establece la proyección de uno de los electrones, queda establecida unívocamente la otra proyección. Lo que hace que la función después de la medición se transforme en uno de las posibilidades que se encuentran entre su *qextensión* y su *clausura*. Esto está de acuerdo con lo discutido (en el marco del axioma de unión de quasets (2.13)) sobre las proyecciones P^+ y P^-. Lo anterior nos lleva a reflexionar acerca de la relación que podría existir entre, por un lado, la indeterminación que los quasets tienen entre su *qextensión* y *clausura*, y por el otro, la superposición y la medición cuántica.

Una última observación antes de dar por concluida esta sección. La indeterminación permitida por las funciones entre quasets, como la que acabamos de ver, tiene un cierto parecido con la indeterminación semántica permitida por las Nmatrices, que presentaremos en la sección 2.3. La diferencia principal radica en que la Nmatrices están basadas originalmente en conjuntos de ZF y logran su indeterminismo a través de un aparato formal que permite a las valuaciones no ser homomorfismos, mientras que en el caso de QST (o $\mathfrak{Q}$) la indeterminación es inherente a la propia teoría de conjuntos. Esto permite que la indeterminación se incorpore desde un principio sin necesidad de un formalismo semántico especial. Podemos incorporar el indeterminismo desde el comienzo si elegimos teorías como QST o $\mathfrak{Q}$ (o RST) como base de nuestra semántica. Una idea similar se encuentra en la motivación principal por la cual $\mathfrak{Q}$ es incorporada desde el principio para generar los espacios de Fock en (Holik et al. 2020).

3.5. Ampliando la axiomática de QST

Ya tenemos los recursos necesarias para *fundamentar una semántica de Nmatrices utilizando quasets*. Esta sección finaliza nuestros esfuerzos con respecto a QST. Por supuesto, queda aún una cantidad importante de cosas por establecer respecto a los quasets. Posiblemente podamos seguir desarrollando esta línea en próximos trabajos. Definiremos dos nuevas teorías de quasets, QST^+ y $\overline{QST}^+$, como extensiones alternativas de la axiomática original de QST, con el objetivo de *basar el sistema semántico de Nmatrices en alguno de estos sistemas* (sección 4.5).

QST$^+$

El lenguaje de QST^+ es el lenguaje original de QST expandido con un símbolo primitivo de unión de quasets ($\sqcup$). Todos los axiomas de QST forman parte de los axiomas de QST^+, pero éste cuenta con axiomas extras como los axiomas de cardinal generalizado 3.1 (que reemplaza al axioma 2.9), unión de quasets (2.13), par no ordenado (3.9), quaset potencia (3.3 o 3.4), *clausura* (3.1). Además se considera que condiciones como la relativa al complemento (14) y la que determina la *qextensión* del producto cartesiano (63) forman parte de la teoría.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\text{Lenguaje de } QST^+ = \text{Lenguaje de QST} + \{\sqcup\}$$

$$\begin{aligned}&\text{Axiomas de } QST^+ = \\ &\qquad \text{Axiomas de QST} + \{\text{Card generalizado, Unión, Par, Potencia, Clausura}\}\end{aligned}$$

Los axiomas extras (3.5)(estandarización parcial) y (3.6) (antiestandarización parcial) permiten tener acceso a más quasets, que podrían ser de utilidad en algún momento para objetivos que vayan más allá de los semánticos. Por este motivo los vamos a incluir como alternativa en lo que llamaremos $\overline{QST}^{+}$.

$\overline{\mathbf{QST}}^{+}$

$$\text{Lenguaje de } \overline{QST}^{+} = \text{Lenguaje de } QST^{+}$$

$$\begin{aligned}&\text{Axiomas de } \overline{QST}^{+} = \\ &\qquad \text{Axiomas de } QST^{+} + \{\text{Estandarización parcial, Antiestandarización parcial}\}\end{aligned}$$

Hay que recordar que tuvimos que establecer estos sistemas alternativos, que extienden QST, *debido a que la axiomática original de quasets no aseguraba, entre otros, la existencia de las relaciones y funciones necesarias para la semántica Nmatricial en quasets*. Las extensiones propuestas aseguran estos recursos. Por lo tanto, serán la base metamatemática de nuestras nuevas Nmatrices.

3.6. Topología de cerriabiertos (cloped)

Vamos ahora a imponer ciertas cláusulas que vinculan los primitivos $\sqcap, \sqcup$ con la *clausura* y *qextensión* de quasets. Las mismas serán necesarias para que poder establecer una topología dentro de QST^{+}. Por otro lado, la imposición de estas restricciones acota la “cantidad”de modelos de nuestro sistema formal. Una de ellas ya fue presentada y utilizada en la subsección destinada al complemento de quasets (condición iv). En este trabajo, nos comprometemos con las versiones débiles, las versiones fuertes serán analizadas en futuras aplicaciones. La importancia de este apartado con respecto a la línea principal del trabajo, radica en su función a la hora de relacionar QST con RST. Esta relación muestra la existencia de modelos para nuestra axiomática extendida. Sin embargo, el lector podrá entender la definición de Nmatriz en QST (4.5) sin necesidad de la topología presentada.

Proposición 3.1. En todos los casos, x, y, w, z representan quasets genéricos no vacíos.

1. i) (Versión débil) $x \subseteq y \Longrightarrow \overline{x \sqcup y} = \overline{y}$.
2. i’) (Versión fuerte) $x \subseteq y \Longrightarrow x \sqcup y = \overline{y}$
3. ii) (Versión débil) $\overline{x} \subseteq \overline{x \sqcup y}$
4. ii’) (Versión fuerte) $\overline{x} \subseteq x \sqcup y$

5. iii) (Versión débil) $x \sqcup y \subseteq \overline{x} \cup \overline{y}$
6. iii') (Versión fuerte) $(x \subseteq y) \wedge (w \subseteq z) \Longrightarrow x \sqcup w \subseteq y \sqcup z$
7. iv) (Versión débil) $x \subseteq y \Longrightarrow qext(x \sqcap y) = qext(x)$
8. iv) (Versión fuerte) $x \subseteq y \Longrightarrow x \sqcap y = qext(x)$
9. v) (Versión débil) $x \sqcap y \subseteq \overline{x} \cap \overline{y}$
10. v') (Versión fuerte) $(x \subseteq y) \wedge (w \subseteq z) \Longrightarrow x \sqcap w \subseteq y \sqcap z$
11. vi) $(x \sqcup y = w \sqcup z) \wedge (x = w) \wedge (x \sqcap y = \emptyset) \wedge (w \sqcap z = \emptyset) \Longrightarrow y = z$
12. vii) (Versión débil) $qext(x) \cap qext(y) \subseteq x \sqcap y$
13. vii') (Versión fuerte) $(x \subseteq y) \wedge (w \subseteq z) \Longrightarrow x \sqcap w \subseteq y \sqcap z$

Con las condiciones anteriores impuestas sobre la *clausura* (definición 3.1), podemos ver que esta operación cumple las condiciones correspondientes al operador de consecuencia en un espacio de Tarski (se recomienda sección 4 de (do Nascimento et al. 2011).

Definición 3.5. Un *espacio de Tarski* es un par $\mathscr{T} = \langle E, \overline{(\ )} \rangle$, donde E es un conjunto no vacío y $\overline{(\ )} : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, una función que cumple:

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. $\overline{A} \sqcup \overline{B} \subseteq \overline{A \sqcup B}$
3. $\overline{A \sqcap B} \subseteq \overline{A} \sqcap \overline{B}$
4. $\overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}} = \overline{A \sqcup B}$
5. $\overline{A} \sqcap \overline{B} = \overline{\overline{A} \sqcap \overline{B}}$

Antes de comenzar a analizar las condiciones anteriores, mostraremos la *monotonía* de la clausura con respecto a la inclusión de quasets, ya que usaremos esta propiedad en las pruebas. Es decir, tenemos que mostrar que $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$. Usando la condición ii) de 2.13

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \sqcup B}$$

Y utilizando la condición i) de la misma sección, tenemos que si $A \subseteq B$:

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \sqcup B} \subseteq \overline{B}$$

De lo anterior, se obtiene que si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Pasemos ahora al análisis de las condiciones 1-5. Es inmediato ver que se cumple la condición 1, ya que $\overline{A}$ es un conjunto clásico para todo A, y esto significa que coincide con su clausura (y su *qextensión*). La condición 5 también se cumple de forma directa. Tanto $\overline{A}$ como $\overline{B}$ son conjuntos clásicos, es decir, $Z(A), Z(B)$, entonces

$\overline{A} \sqcap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Donde hemos utilizado que para conjuntos clásicos, la conjunción débil de quasets coincide con la intersección de ZF. De esto último se ve que $\overline{A} \cap \overline{B}$ es un conjunto clásico. Es decir, coincide con su clausura. Por lo tanto, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \sqcap \overline{B} = \overline{\overline{A} \sqcap \overline{B}}$. Para ver que se cumple la condición 4, separemos la igualdad en una doble inclusión. Esto es, primero probaremos que se cumple $\overline{A \sqcup B} \subseteq \overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}}$. Por condición iii), $A \sqcup B \subseteq \overline{A} \sqcup \overline{B}$. Como acabamos de mostrar que la clausura preserva las relaciones de inclusión, obtenemos $\overline{A \sqcup B} \subseteq \overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}}$. Para probar el otro sentido de la inclusión, notemos que $Z(\overline{A})$ y $Z(\overline{B})$ implica que $\overline{A} \sqcup \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, esto es, $Z(\overline{A} \sqcup \overline{B})$. Por lo tanto, $\overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}} = \overline{A} \sqcup \overline{B}$. Si usamos en esta última expresión la condición 2, que ahora probaremos, lo anterior implica que $\overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}} = \overline{A} \sqcup \overline{B} \subseteq \overline{A \sqcup B}$. Lo que prueba la inclusión buscada. Por supuesto, lo anterior depende de que tengamos una prueba independiente para la condición 2. Veamos esta condición. Por definición de unión de quasets, $A \subseteq A \sqcup B$. Aplicando la monotonía de la clusura, obtenemos $\overline{A} \subseteq \overline{A \sqcup B}$. Procediendo de la misma forma para B, $\overline{B} \subseteq \overline{A \sqcup B}$. Por lo tanto, de las dos condiciones anteriores obtenemos lo deseado (utilizando iii)), $\overline{A} \sqcup \overline{B} \subseteq \overline{A \sqcup B}$. Por último, veamos que se cumple la condición 3. Por vi), $A \sqcap B \subseteq \overline{A} \sqcap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Por monotonía de la clausura, $\overline{A \sqcap B} \subseteq \overline{\overline{A} \sqcap \overline{B}}$. Y aplicando la condición 5 ya probada, se tiene que $\overline{A \sqcap B} \subseteq \overline{\overline{A} \sqcap \overline{B}} = \overline{A} \sqcap \overline{B}$. Lo que termina la prueba.

Definición 3.6. Un *espacio topológico* es una dupla $\langle E, \overline{(\ )} \rangle$, tal que E es un quaset no vacío y $\overline{(\ )}$ es una función que va del conjunto potencia de E en sí mismo, $\overline{(\ )} : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, que cumple:

1. $A \subseteq \overline{A}$
2. $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{\emptyset} = \emptyset$

La clasura de un quaset valida automáticamente (por definición) la primera condición. Como la clausura de todo quaset es un conjunto de Zermelo–Fraenkel, coincide con su qextensión y clausura. Por lo tanto, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Lo que produce que se satisfaga la segunda condición. La última también se cumple de forma automática debido a la definición de clausura. Veamos la tercera condición. Debemos probar una sola de las inclusiones, una de ellas ya la probamos en el ítem 2 de la definición de espacio de Tarski. Probemos que $\overline{A \sqcup B} \subseteq \overline{A} \sqcup \overline{B}$. Al iniciar la sección, probamos la cuarta condición de la clausura como operador de consecuencia (definición 3.5), vimos que $\overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}} = \overline{A \sqcup B}$. Por lo tanto, $\overline{A \sqcup B} \subseteq \overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}}$. Pero el segundo miembro de la inclusión es un conjunto clásico, ya que $Z(\overline{A}), Z(\overline{B})$, implica que $\overline{A} \sqcup \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, esto es, $Z(\overline{A} \sqcup \overline{B})$. Por lo tanto, $\overline{\overline{A} \sqcup \overline{B}} = \overline{A} \sqcup \overline{B}$. Obteniendo $\overline{A \sqcup B} \subseteq \overline{A} \sqcup \overline{B}$ como se deseaba probar. Por lo tanto, nuestra función clausura puede verse como una operación que define una topología dentro de subconjuntos de quasets.

Definición 3.7. Sea $\mathscr{T} = \langle E, \overline{(\ )} \rangle$ un espacio de Tarski y $A \subseteq E$. Decimos que el quaset A es cerrado en nuestro espacio cuando $A = \overline{A}$ y es abierto cuando su complemento relativo a E, A^c, es cerrado.

Con esta definición, los quasets que coincidan con su clausura (y por lo tanto con su *qextensión*) serán al mismo tiempo cerrados y abiertos de nuestro espacio. Es decir, los conjuntos clásicos formarán una base de cerriabiertos (cloped) de nuestra topología en QST. Para ver que todos los conjuntos clásicos también son abiertos, debemos recordar que por (21), los elementos con pertenencia indeterminada a A^q coinciden con los de pertenencia indeterminada a su complemento, $(A^q)^c$. Por lo tanto, si un quaset no tienen elementos con pertenencia indeterminada, es decir, es clásico, su complemento tampoco puede tenerlos. Lo que significa que su complemento también es clásico, es decir, coincide con su clausura, y por lo tanto es cerrado. Esto muestra que todo conjunto clásico es abierto. En la sección 4 de (do Nascimento et al. 2011), se definen los cerrados para una topología en $\mathfrak{Q}$, utilizando el concepto de *nube*, y los conjuntos clásicos también son cerrados. En ambas teorías los conjuntos de ZF son cerrados para las topologías definidas. La principal diferencia radica en que $\mathfrak{Q}$ cuenta con más cerrados que conjuntos clásicos.

Si llamamos $\mathscr{C}$ al conjunto de los cerrados de un quasets E y denotamos mediante 1 y 0 a los quasets E y $\emptyset$, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2. La estructura $\langle \mathscr{C}, \sqcap, \sqcup, 0, 1 \rangle$ es un retículo distributivo

La prueba se deriva directamente de la definiciones 2.13 y 2.7, ya que todos los quasets cerrados son conjuntos clásicos para los cuales $\sqcap$ y $\sqcup$ coinciden con $\cap$ y $\cup$. Si E no llegara a coincidir con su clausura, podrían considerarse todos los cerrados de $\overline{E}$, en vez de los de E.

3.7. Relación entre RST y QST$^+$

Presentaremos ahora algunas relaciones entre QST y RST. Hasta donde llega nuestro conocimiento, la conexión entre ambas teorías no ha sido objeto de estudio. Vincular ambas teorías puede ser de interés a la hora de encontrar modelos para QST y aplicaciones a diferentes dominios, ya que Rough Sets cuenta con una gama muy amplia de aplicaciones. La teoría de Rough Sets (RST) está desarrollada dentro de la axiomática de ZF, por lo cual puede entenderse como una teoría *semi-extensional*. Veremos que las similitudes formales entre ambas teorías pueden sugerir ideas interesantes a la hora de su representación. Tenemos la esperanza de que estos *paralelismos* ayuden a que QST entre en relación con algunas de las tantas áreas que se vincula RST. Además, las relaciones establecidas mostrarán que RST es un posible modelo de QST.

3.7.1. Estableciendo relaciones básicas

Para comenzar a vincular estas teorías, vamos a centrar nuestra atención en la *similitud* que muestran sus relaciones de pertenencia. Ésta será nuestra guía para comenzar a establecer vínculos. La característica principal que muestra QST con respecto a sus primitivos de pertenencia es la existencia de elementos con pertenencia indeterminada, esto es, la existencia de quasets x, y, tales que

$$\neg(x \in y) \wedge \neg(x \notin y).$$

Por otro lado, es fácil corroborar, según las definiciones dadas, que en Rough Sets también existen x, y, tales que (suponemos que la relación (o relaciones) de indiscernibilidad se encuentra ya dada)

$$\neg(x \,\underline{\in}_A y) \wedge (x \,\overline{\in}_A y).$$

O equivalentemente

$$\neg(x \,\underline{\in}_A y) \wedge \neg(x \,\overline{\notin}_A y).$$

Lo que nos sugiere interpretar el conectivo de QST de pertenencia con certeza, $\in$, como la pertenencia con seguridad de RST, $\underline{\in}_A$. Y el conectivo *con seguridad no pertenece*, $\notin$, como la negación del *posiblemente pertenezca* de RST, es decir, como $\neg\overline{\in}_A$ (o equivalentemente, $\overline{\notin}_A$). De esta manera, los análogos a los elementos que pertenecen de forma indeterminada a un conjunto en QST pasan a ser los elementos que pertenecen al borde (*Bnd*) del conjunto.

(67) $$Bnd_A(X) = \overline{Apr}_A(X) - \underline{Apr}_A(X) = \{x \in U : \neg(x \,\underline{\in}_A X) \wedge \neg(x \,\overline{\notin}_A X)\}$$

Nótese que, al igual que en QST, vale que

$$\forall x \quad \forall y \;\; (x \underline{\in}_A y \longrightarrow \neg(x \overline{\notin}_A y)).$$

Pero no vale la vuelta.

Veamos ahora cuál es el candidato en RST a representar el concepto de *qextensión*. Por definición 2.3

$$\forall x \; \forall y \; (y = qext(x) \longleftrightarrow \forall z \; ((z \in y \longleftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \longleftrightarrow \neg(z \in x))))$$

Reemplazando $\in, \notin$ por $\underline{\in}_A$, $\neg\overline{\in}_A$ respectivamente y denotando con B al representante de $qext(x)$ en RST:

$$\forall x \; \forall y \; (y = B \longleftrightarrow \forall z \; ((z \underline{\in}_A y \longleftrightarrow z \underline{\in}_A x) \wedge (z \overline{\notin}_A y \longleftrightarrow \neg(z \underline{\in}_A x))))$$

Veamos que lo anterior define a B como el conjunto $\underline{Apr}_A(x)$. Es decir, el papel de la *qextensión* de un conjunto x en RST estaría dado por $B = \underline{Apr}_A(x)$.

Mostremos que para cualesquiera elementos x, y, z pasa que

(68) $$(z \underline{\in}_A \underline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow z \underline{\in}_A x) \wedge (z \overline{\notin}_A \underline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow \neg(z \underline{\in}_A x))$$

Por definición de pertenencia fuerte (2.6),

$$z \underline{\in}_A \underline{Apr}_A(x) \Longleftrightarrow z \in \underline{Apr}_A(\underline{Apr}_A(x))$$

Utilizando la propiedad dada en (7), la doble implicación anterior puede expresarse como

$$z \underline{\in}_A \underline{Apr}_A(x) \Longleftrightarrow z \in \underline{Apr}_A(x)$$

Nuevamente, por definición de pertenencia fuerte

$$z \underline{\in}_A \underline{Apr}_A(x) \Longleftrightarrow z \in \underline{Apr}_A(x) \Longleftrightarrow z \underline{\in}_A x$$

Con lo que mostramos que se cumple el primer conyunto de (68).

Pasemos ahora al segundo conyunto.

$$z \overline{\notin}_A \underline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow \neg(z \underline{\in}_A x)$$

Probaremos la siguiente fórmula equivalente

$$z \overline{\in}_A \underline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow (z \underline{\in}_A x)$$

Por definición de pertenencia débil,

$$z \overline{\in}_A \underline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow z \in \overline{Apr}_A(\underline{Apr}_A(x))$$

Por ecuación (7),

$$z \in \overline{Apr}_A(\underline{Apr}_A(x)) \longleftrightarrow z \in \underline{Apr}_A(x)$$

Y de nuevo utilizando la definición de pertenencia débil, llegamos a

$$(z \in \underline{Apr}_A(x)) \longleftrightarrow (z \underline{\in}_A x)$$

Y esta última expresión es válida por definición. Por lo tanto, hemos probado que $\underline{Apr}_A(x)$ respeta la propiedad fundamental que en QST define a la *qextensión* de un quaset.

Podemos reproducir el mismo razonamiento para la *clausura* de un quaset. Recordando la definición de *clausura* (3.1),

$$\forall x\ \forall y\ (y = \overline{x} \longleftrightarrow \forall z \quad ((z \notin y \longleftrightarrow z \notin x) \wedge (z \in y \longleftrightarrow \neg(z \notin x)))).$$

Realizando la traducción correspondiente para el caso de RST y denotando por C su clausura

$$\forall x\ \forall y\ (y = C \longleftrightarrow \forall z \quad ((z\, \overline{\notin}_A y \longleftrightarrow z\, \overline{\notin}_A x) \land (z \underline{\in}_A y \longleftrightarrow \neg(z\, \overline{\notin}_A x)))).$$

Si $C = \overline{Apr}_A(x)$, entonces nos queda la siguiente cláusula, que se cumple por definición de aproximación superior (utilizando que $z \underline{\in}_A \overline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow z \overline{\in}_A \overline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow z \in \overline{Apr}_A(x)$).

$$\forall z \quad ((z\, \overline{\notin}_A \overline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow z\, \overline{\notin}_A x) \land (z \underline{\in}_A \overline{Apr}_A(x) \longleftrightarrow \neg(z\, \overline{\notin}_A x))).$$

Lo que significa que el papel que en QST realiza la *clausura* de un quaset pasa a ser ocupado en RST por la aproximación superior del rough set.

Pasemos ahora a analizar algunas cuestiones vinculadas a las inclusiones. Cuando definimos las inclusiones de RST (definición 2.9), observamos que las mismas cumplen las condiciones de orden parcial, de la misma manera que pasa en QST (axioma 2.3). Veamos que si tomamos la relación de inclusión *aproximadamente incluido* ($\widetilde{\underset{\sim}{\subsetneq}}_A$), que implica las otras dos, como el análogo a la inclusión de quasets, se mantiene también el axioma 2.4. Haciendo los cambio correspondientes en este axioma, veamos que se cumple

$$\forall x \quad \forall y\ \ (x\ \ \widetilde{\underset{\sim}{\subsetneq}}_A\ y \longrightarrow \forall z\ ((z\ \underline{\in}_A x \longrightarrow z\ \underline{\in}_A y) \land (z\ \overline{\notin}_A y \longrightarrow z\ \overline{\notin}_A x)))$$

Veamos que el primer conyunto del consecuente significa que *x está aproximadamente incluido inferiormente* en y, $x\ \underset{\sim}{\subsetneq}_A\ y$.

$$z\ \underline{\in}_A x \longrightarrow z\ \underline{\in}_A y \Longleftrightarrow z \in \underline{Apr}_A(x) \longrightarrow z \in \underline{Apr}_A(y) \Longleftrightarrow$$
$$\underline{Apr}_A(x) \subset \underline{Apr}_A(y) \Longleftrightarrow x\ \underset{\sim}{\subsetneq}_A\ y$$

Analicemos ahora la segunda parte de la conjunción del consecuente.

$$z\ \overline{\notin}_A y \longrightarrow z\ \overline{\notin}_A x \Longleftrightarrow z\ \overline{\in}_A x \longrightarrow z\ \overline{\in}_A y \Longleftrightarrow$$
$$z \in \overline{Apr}_A(x) \longrightarrow z \in \overline{Apr}_A(y) \Longleftrightarrow \overline{Apr}_A(x) \subset \overline{Apr}_A(y)$$

Y esto último significa que $x\ \widetilde{\subset}_A\ y$ Resumiendo, la traducción del axioma relativo a la inclusión de QST se traduce como

$$\forall x \quad \forall y\ \ (x\, \widetilde{\underset{\sim}{\subsetneq}}_A\ y \longrightarrow x\ \widetilde{\subset}_A\ y \land x\ \underset{\sim}{\subsetneq}_A\ y)$$

Que se cumple por la definición de *aproximadamente incluido* (los rough sets validan el bicondicional, por lo tanto validan la propiedad anterior). Por lo tanto, podemos validar también los axiomas de la inclusión utilizando modelos de RST.

Otro de los axiomas de QST que se compromete con la inclusión es el que define la conjunción débil de quasets (axioma 2.7). Para poder analizarlo su traducción a RST, debemos precisar qué significa en rough sets el predicado $Z(x)$, que en QST significa ser un conjunto clásico, es decir, que coincide con su *qextensión*. Como ya sabemos que el equivalente $qext(x)$ en RST es $\underline{Apr}_A(x)$, entonces definimos el predicado de la siguiente manera:

Definición 3.8. Sea $x \in U$.

$$Z(x) \text{ si y sólo si } \; x = \underline{Apr}_A(x)$$

Si asociamos la conjunción débil entre quasets ($\sqcap$) con la intersección ($\cap_r$) de rough sets y el predicado Z como acabamos de definir, entonces el axioma 2.7 queda

$$\forall x \;\; \forall y \;\; ((x \cap_r y \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A x \wedge x \cap_r y \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A y) \wedge (Z(x) \wedge Z(y) \rightarrow x \cap_r y = x \cap y))$$

Debido a que la intersección de rough sets es la misma que la de ZF, al eliminar el subíndice r de la intersección, el segundo conyunto de la expresión anterior se valida automáticamente. Es más, se cumple algo más fuerte, a saber, $Z(x) \wedge Z(y) \longrightarrow Z(x \cap y)$. Veamos que se dan las dos inclusiones del primer conyunto. Considerando el primero,

$$x \cap y \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A x \Longleftrightarrow x \cap y \mathrel{\tilde{\subset}}_A x \wedge x \cap y \subsetneqq_A x$$

Analicemos el primer conyunto de esta expresión. Por definición,

$$x \cap y \mathrel{\tilde{\subset}}_A x \Longleftrightarrow \overline{Apr}_A(x \cap y) \subset \overline{Apr}_A(x)$$

Y esto último se cumple siempre debido a una de las propiedades de la intersección (ver Pawlak 1982),

$$\overline{Apr}_A(x \cap y) \subset \overline{Apr}_A(x) \cap \overline{Apr}_A(y) \tag{69}$$

Por otro lado, volviendo al segundo conyunto del bicondicional,

$$x \cap y \subsetneqq_A x \Longleftrightarrow \underline{Apr}_A(x \cap y) \subset \underline{Apr}_A(x)$$

Esto se da siempre debido a que también se cumple lo siguiente (Pawlak 1982):

$$\underline{Apr}_A(x \cap y) = \underline{Apr}_A(x) \cap \underline{Apr}_A(y) \tag{70}$$

Por lo tanto, hemos probado que se cumple $x \cap y \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A x$. De la misma forma se puede probar que $x \cap y \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A y$. Con lo cual queda mostrado que se satisface también, con las traducciones necesarias, el axioma relativo a la conjunción débil. Lo cual muestra que, haciendo las traducciones mostradas, todos los axiomas de la formulación original de QST (que no sean relativos a la cardinalidad) se validan en RST (el axioma de vacío se valida de forma trivial). Un razonamiento similar al que hicimos con la conjunción débil se puede hacer para el axioma de unión de quaset $\sqcup$ (que forma parte de la axiomática y lenguaje ampliado). Esto sugiere tener a los rough sets como ciertos modelos semi-extensionales dentro de QST (y utilizarlos para expresar Nmatrices).

En la sección 3.3, al caracterizar el complemento, propusimos las ecuaciones (3.8), (14). Mostraremos que la condición (14) también se mantiene al interpretarla en RST. Realizando los correspondientes cambios, la condición citada se transforma en :

$$(\underline{Apr}_A(x))^c = \underline{Apr}_A(x^c) \cup \{y : \neg(y \underline{\in}_A x) \wedge \neg(y \overline{\notin}_A x)\}$$

Reemplazando el supraíndice de complemento por el signo de complemento en RST (—) y utilizando la definición de Borde (67) obtenemos:

$$-(\underline{Apr}_A(x)) = \underline{Apr}_A(-x) \cup Bnd_A(x)$$

El miembro derecho de la igualdad es igual a $\overline{Apr}_A(-x)$, con lo que la ecuación anterior queda:

$$-(\underline{Apr}_A(x)) = \overline{Apr}_A(-x)$$

O equivalentemente,

$$\underline{Apr}_A(x) = -\overline{Apr}_A(-x)$$

Que es una de las relaciones válidas entre las aproximaciones superiores e inferiores en RST. Con lo cual mostramos que nuestra caracterización del complemento en QST también se valida cuando es interpretada en RST. Hasta acá hemos relacionado los axiomas y definiciones de la axiomatización original de QST. La relación puede extenderse a QST^+. Por ejemplo, puede mostrarse que el axioma de quaset potencia (3.4) también es satisfecho dentro de RST. Veamos esto. Haciendo la correspondiente traducción al lenguaje de RST, el axioma 3.4 puede escribirse como

$$\text{(71)} \quad \forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad ((\neg(z \overline{\notin} y) \longleftrightarrow z \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A x) \quad \wedge \quad (x = \underline{Apr}_A(x) \longrightarrow y = \mathscr{P}(x)))$$

La condición dada por el segundo conyunto se satisface automáticamente por el conjunto potencia de ZF, que está garantizado por axioma 2.8. Lo que tenemos que mostrar es que existen rough sets que satisfacen la primera parte de la conjunción (aunque tales conjuntos no sean exactamente los que en RST se denominan conjuntos potencia. RST cuenta con diferentes conjuntos potencias (ver sección 4 de Pawlak 1982).

(72)

$$\mathscr{P}_{\underline{A}}(X) := \{Y : Y \subsetneqq_A X\} \quad ; \quad \mathscr{P}_{\overline{A}}(X) := \{Y : Y \mathrel{\tilde{\subset}}_A X\} \quad ; \quad \mathscr{P}_A(X) := \{Y : Y \mathrel{\tilde{\subsetneqq}}_A X\}$$

Puede verse que el conjunto potencia presentado en la tercera opción satisface un caso particular de nuestro axioma, el caso donde $\neg\overline{\notin}_A$ colapsa en $\overline{\in}_A$. Por lo tanto, aunque nuestro axioma presentado para QST es más general, existen ciertos rough sets que lo satisfacen. Lo que hay que señalar es que estas definiciones de conjuntos potencias en RST son tales que los entes que las verifican son conjuntos, es decir, coinciden con su aproximación inferior. Por como están definidos, si un conjunto Y verifica la condición de inclusión respectiva, entonces pertenece al conjunto potencia, y de lo contrario, no pertenece.

Lo mismo pasa para el axioma de par de QST^+. Se prueba de forma directa que si RST garantiza la existencia de un conjunto par (para cualesquiera dos rough sets), ese axioma satisface el axioma de quaset par. Por lo tanto, existen modelos de QST formados por rough sets. Es como contar con cierta copia de RST dentro de QST, además, por supuesto, de la copia de ZF que viene por definición. Podríamos resumir algunas de las interpretaciones realizadas en una tabla.

QST	RST
$\in$	$\underline{\in}_A$
$\notin$	$\overline{\notin}_A$
$\subseteq$	$\underset{\sim}{\widetilde{\subset}}_A$
$=$	$\approx$
$qext(x)$	$\underline{Apr}_A(x)$
$\overline{x}$	$\overline{Apr}_A(x)$
$Z(x)$	$x = \underline{Apr}_A(x)$
$x \notin y \longrightarrow \neg(x \in y)$	$x \,\overline{\notin}_A y \longrightarrow \neg(x \,\underline{\in}_A y)$
$\neg(x \in y) \wedge \neg(x \notin y)$	$\neg(x \,\underline{\in}_A y) \wedge \neg(x \,\overline{\notin}_A y)$

Observación: por un lado, hemos establecido una interesante relación entre QST y RST, y por el otro, en la siguiente sección, relacionaremos las Nmatrices con QST. Incorporaremos los quasets al seno de las funciones de interpretación de los conectivos, la relación de consecuencia lógica y los valores de verdad. Consecuentemente, tendremos también establecida esta una relación entre RST y las Nmatrices. También nombramos que RST es una teoría que fue relacionada con muchas disciplinas, las Nmatrices no han sido la excepción. En Avron y Konikowska (2008) se da una caracterización semántica de la unión, intersección y complemento de RST utilizando lógicas multivaluadas en el marco de las Nmatrices estándar (con conjuntos de ZF). Para acentuar aún más el vínculo existente entre QST y RST, en el apéndice A daremos una caracterización semántica de la unión e intersección de quasets en el mismo marco.

4. Nmatrices en QST: conectivos y relación de consecuencia lógica en el marco de QST

Finalmente hemos llegado a la sección principal de nuestro trabajo. Investigaremos algunas posibles generalizaciones de los conectivos Nmatriciales, en el marco de la axiomática ampliada para QST de la sección 3, para luego ver un análisis de sus teoremas asociados. Pasaremos finalmente a dar una definición de Nmatrices basadas en QST y presentaremos un ejemplo particular de aplicación que resalta las propiedades fuertemente no estándar de las mismas.

4.1. Conjuntos de interpretación para los conectivos en QST

Consideremos el conjunto de interpretación para la conjunción, tal como lo define Avron (caso que cumple *adecuación*, ver sección 3 de Avron 2007)

$$\tilde{\wedge}_{(a,b)} = \begin{cases} A \subset D & \text{si } a \in D \quad \text{y} \quad b \in D \\ B \subset V \setminus D & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde se presupone que todos los conjuntos son clásicos, es decir, pueden expresarse en una axiomática del estilo ZF. Como ya hemos adelantado, vamos a estudiar algunas consecuencias de cambiar el conjunto de valores de verdad, V, por un quaset V^q, tal que $V = qext(V^q)$. Esto es, un quaset de valores de verdad que tenga una *qextensión* coincidente con el conjunto clásico. Sea $D^q \subseteq V^q$ el quaset de valores designados (con la inclusión de quasets 2.3), tal que $D = qext(D^q)$. Definimos el conjunto de valores no designados N^q de la siguiente manera: el conjunto N^q es tal que (según 3.3)

(73) $$D^q \sqcup N^q = \overline{V^q} \quad ; \quad D^q \sqcap N^q = \emptyset$$

(74) $$(qext(D^q))^c = qext(N^q) \sqcup \{y \in \overline{V^q} : y \in^- D^q\}$$

Esto es, N^q es el complemento de quasets de V^q.

> Observación: se podría optar por definir el conjunto de no designados, dependiendo los intereses, como $N^q = \{x \in V^q : x \notin D^q\}$ o $N^q = \{x \in V^q : \neg(x \in D^q)\}$. Las alternativas se relacionan con lo discutido acerca del complemento en QST en la sección 3.3. Nuestra elección da la libertad que necesitamos para definir la consecuencia semántica.

Definamos ahora el siguiente quaset de interpretación para la conjunción, $\tilde{\wedge}^q_{(a,b)}$:

(75)
$$\tilde{\wedge}^q_{(a,b)} = \begin{cases} A \subseteq D^q & \text{si } a \in D^q \quad \text{y} \quad b \in D^q \\ B \subseteq N^q & \text{si } \neg(a \in D^q) \quad \text{o} \quad \neg(b \in D^q) \end{cases}$$

Las inclusiones deben ser entendidas en el sentido de QST (2.3), todas las negaciones son clásicas y supondremos que tanto A como B son no vacíos. Además, en el límite clásico, cuando los quasets son conjuntos de ZF, nuestra definición coincide con la estándar para la conjunción. Con esta definición aseguramos que las valuaciones para la conjunción siempre tomen un valor definido, es decir, no haya huecos de valores de verdad.

Podemos también tener alternativas a la hora de definir el conjunto de interpretación.

Si lo definimos como:

(76)
$$\tilde{\wedge}^q_{(a,b)} = \begin{cases} A \subseteq D^q & \text{si } a \in D^q \quad \text{y} \quad b \in D^q \\ B \subseteq N^q & \text{si } a \notin D^q \quad \text{o} \quad b \notin D^q \end{cases}$$

damos la posibilidad de que existan valores de verdad para los cuales no esté definido el conjunto de interpretación (valores con pertenencia indeterminada al quaset D^q) y, por lo tanto, haya huecos de valores de verdad. Sin embargo, esta definición sigue coincidiendo en el límite clásico con la estándar. Se pueden analizar varias posibles generalizaciones para las cuales recuperamos, en el límite de conjuntos clásicos, la semántica Nmatricial estándar. Otra posibilidad, que coincide con la clásica, es la siguiente:

(77)
$$\tilde{\wedge}^q_{(a,b)} = \begin{cases} A \subset D \equiv qext(D^q) & \text{si } a \in D^q \quad \text{y} \quad b \in D^q \\ B \subset V \setminus D \equiv qext(N^q) & \text{si } \neg(a \in D^q) \quad \text{o} \quad \neg(b \in D^q) \end{cases}$$

Donde la inclusión y la resta de conjuntos son las correspondientes a ZF. Por supuesto, más posibilidades pueden ser exploradas.
De igual forma, podemos definir los respectivos conjuntos para la disyunción.

(78)
$$\tilde{\vee}^q_{(a,b)} = \begin{cases} A \subseteq D^q & \text{si } a \in D^q \quad \text{o} \quad b \in D^q \\ B \subseteq N^q & \text{si } (a \notin D^q) \quad \text{y} \quad (b \notin D^q) \end{cases}$$

Donde existirán valores para los cuales el conjunto no esté definido.
Si queremos que el conjunto esté siempre definido, podemos definirlo, por ejemplo, como:

$$\tilde{\vee}^q_{(a,b)} = \begin{cases} A \subseteq D^q & \text{si } a \in D^q \quad \text{o} \quad b \in D^q \\ B \subseteq N^q & \text{si } \neg(a \in D^q) \quad \text{y} \quad \neg(b \in D^q) \end{cases} \tag{79}$$

Las valuaciones Nmatriciales para la conjunción cumplen que $v_{(p\wedge q)} \in \tilde{\wedge}_{(a,b)}$ (definición 2.12), pero, por definición 2.3, esto es equivalente a pedir que $v_{(p\wedge q)} \in qext(\tilde{\wedge}_{(a,b)})$. Por lo tanto, utilizar en las definiciones anteriores un quaset A o su *qextensión* es equivalente. Esto es, en las definiciones de arriba, podemos reemplazar expresiones del estilo $A \subseteq D^q$ por $A \subset D$, donde $D = qext(D^q)$. Esto vale, no por ser estas dos expresiones equivalentes (de hecho, no los son, ya que la primera implica la segunda, pero no vale la inversa), sino por ser equivalentes a efectos de la pertenencia estricta, que es la que aparece en la definición de valuación. Razonamientos análogos podemos emplear para los demás conectivos. En las secciones 4.4 y 4.5 se tratará la posibilidad de que las valuaciones no queden definidas sólo por la pertenencia (∈), dando la posibilidad de que las valuaciones con pertenencia indeterminada jueguen su papel.

4.2. Relaciones de consecuencia lógica

Dejemos por el momento el tratamiento de los conectivos para centrarnos en los cambios que podrían darse a nivel de la relación de consecuencia lógica. Podríamos dejar los conjuntos de interpretación para los conectivos sin cambios y emplear los quasets en la definición de esta relación.

Para esto también tenemos varias opciones, comencemos explorando algunas de éstas. Por comodidad, para centrarnos en el punto a analizar, consideraremos relaciones de consecuencia lógica entre proposiciones y que tanto el antecedente como el consecuente cuenta con un sola proposición. La generalización de los razonamientos para el caso de conjuntos de proposiciones o de un lenguaje de primer orden puede hacerse de manera estándar. Consideremos la relación de consecuencia lógica definida como:

$$\phi \models \psi \quad \text{sii} \quad \forall v \quad (v(\phi) \in D^q \Longrightarrow v(\psi) \in D^q) \tag{80}$$

Por la definición 2.3, esta definición de consecuencia lógica es equivalente a la clásica en términos de preservación de valores designados. Es decir, aunque ahora hemos utilizado quasets en su definición; como un elemento pertenece con certeza al quaset D^q si y sólo si pertenece con certeza a su *qextensión*, entonces estamos considerando las mismas valuaciones que en el caso clásico.

Sin embargo, también podríamos definir la relación como

(81) $$\phi \models \psi \quad \text{sii} \quad \forall v \quad (\neg(v(\psi) \in D^q) \Longrightarrow \neg(v(\phi) \in D^q))$$

Observemos que, cuando los conjuntos son clásicos, esta definición también coincide con la estándar. La diferencia radica en que ahora estamos considerando ciertas valuaciones que antes no estaban siendo tenidas en cuenta, ya que valuaciones con pertenencia indeterminada a D^q son consideradas en esta definición. De alguna forma, podríamos decir que tenemos "más" valuaciones a considerar.

> Observación: esta definición tiene en cuenta "más" valuaciones, porque las valuaciones con pertenencia indeterminada (con respecto al quaset D^q) cumplen: $\neg(v(\psi) \in D^q) \wedge \neg(v(\psi) \notin D^q)$. Por lo tanto, satisfacen el antecedente del condicional de la definición anterior.

Consideremos otras dos opciones que coinciden en el límite clásico con la definición estándar.

(82) $$\phi \models \psi \quad \text{sii} \quad \forall v \quad (\neg(v(\phi) \notin D^q) \Longrightarrow \neg(v(\psi) \notin D^q))$$

(83) $$\phi \models \psi \quad \text{sii} \quad \forall v \quad (v(\psi) \notin D^q \Longrightarrow v(\phi) \notin D^q)$$

Si a nivel metateórico contamos con Modus Tollendo Tollens, como es nuestro caso, entonces las dos primera definiciones son equivalentes entre sí, y lo mismo pasa con las últimas dos. Observe que lo anterior se mantiene a pesar de las valuaciones extras que aparecen en 81 y 82.

Como bien ya nombramos, en el caso clásico, todas estas definiciones coinciden. Esto nos garantiza que podremos mantener los resultados estándar dentro de QST al considerar todos los quasets que coincidan con su *qextensión*. Podemos definir otras relaciones de consecuencia lógica que involucren diferentes criterios en el antecedente y consecuente, de forma tal que coincidan con algunas semánticas basadas en ZF, que también se comprometen con criterios diferentes. Un ejemplo de esto lo forman las lógicas ST y TS (Chemla et al. 2017, Cobreros et al. 2012, Wintein 2014, Pailos 2020, Ripley 2012). Tanto ST como TS son lógicas subestructurales y sus particularidades se deben a tener dos criterios distintos para el antecedente y consecuente de las inferencias (o metainferencias). Criterios que comúnmente son llamados *estricto/tolerante*. Por ejemplo, y sin entrar en demasiado detalle, en ST se define la relación de consecuencia lógica de forma tal que toda valuación que satisfaga de forma estricta las fórmulas del antecedente, debe satisfacer de forma tolerante alguna de las fórmulas del consecuente. Algo que, en el marco presentado por nosotros, sería del estilo siguiente:

(84) $$\phi \models \psi \quad \text{sii} \quad \forall v \quad (v(\phi) \in D^q \Longrightarrow \neg(v(\psi) \notin D^q))$$

Por supuesto, la expresión anterior no debe entenderse como una reformulación en QST de la relación de consecuencia lógica de ST, simplemente explicitamos una de las posibilidades, inspiradas en lógicas como ST y TS, que pueden presentarse. El análisis que estamos mostrando podría también aplicarse a lógicas subestructurales y que presenten tratamiento de metainferencias (ver discusiones presentadas en (Pailos 2020) y (Barrio y Pailos 2021). Como es sabido, ST captura todas las inferencias válida de la lógica clásica, aunque no sus metainferencias. Si en (84) restringimos el uso de quasets a sólo aquellos que coincidan con su *qextensión*, también podemos recuperar las inferencias clásicas (seleccionando adecuadamente los conjuntos de valores de verdad y designados).

Vamos ahora a probar que la definición dada por (80) no es equivalente a la dada por (83). Vamos a mostrar que ninguna implica a la otra. Para esto, es necesario recordar que, en QST, la implicación válida es (axioma 2.2) $a \notin D \to \neg(a \in D)$ (y su contrarecíproca, $a \in D \to \neg(a \notin D)$). Pero, $\neg(a \in D) \not\to a \notin D$.
Veamos que (80) no implica (83). Sea v una valuación, tal que $v(\psi) \notin D^q$, entonces se sigue que $\neg(v(\psi) \in D^q)$. De esto se deduce, utilizando (80), que $\neg(v(\phi) \in D^q)$. Pero como esto último no implica $v(\phi) \notin D^q$, entonces no podemos asegurar que (83) se siga de (80). Veamos un poco más en detalle lo anterior.
Como el presupuesto es que se cumple (80), tenemos que

$$\forall v \quad (v(\phi) \in D^q \Longrightarrow v(\psi) \in D^q)).$$

Como esta condición no impone ninguna restricción sobre los casos donde la valuación tiene pertenencia indeterminada en ϕ, podría ser el caso que pase lo anterior, pero que además exista una valuación v_0, tal que $[\neg(v_0(\phi) \in D^q) \wedge \neg(v_0(\phi) \notin D^q)] \wedge v_0(\psi) \notin D_q$. Esto es, con pertenencia indeterminada en ϕ y con pertenencia determinada (negativa) en la variable ψ. Esta valuación v_0 es un contraejemplo para (83). Por lo tanto, podría darse (80) sin que se de (83).

Procediendo de la misma forma y utilizando una valuación v_1, tal que $[\neg(v_1(\psi) \in D^q) \wedge \neg(v_1(\psi) \notin D^q)] \wedge v_1(\phi) \in D_q$, puede verse que tampoco (83) implica (80). Entonces, probamos que ninguna de estas definiciones implica a la otra. En el límite clásico, todas estas resultan equivalentes a la relación de consecuencia lógica de LC, pero, en el caso general de QST, las definiciones (80), (81) no pueden coincidir con (82) y (83). Esto tiene como consecuencia que al menos una de las definiciones dadas por (80) y (83) genere un conjunto de consecuencias lógicas diferente al de LC. Como ya nombramos que (80) coincide con la definición clásica, entonces (82) y (83) deben generar consecuencias no clásicas. Esto es, no puede compartir el conjunto de inferencias válidas con la lógica clásica. En breve volveremos a este punto.

Como vimos anteriormente, a la hora de aprovechar la libertad que nos brindan los quasets, una opción, es definir los conjuntos de interpretación para los conectivos en QST de forma tal que en el límite comparta el conjunto de teoremas e implicaciones con LC, pero que en el caso general no valide las mismas cláusulas. Otra opción es mantener los conectivos intactos, pero realizar cambios a nivel de la relación de consecuencia lógica. Por supuesto, esto no agota las posibilidades. Si de cambiar la relación de consecuencia lógica se trata, podría presentarse la siguiente alternativa:

$$\phi \models \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \{v : v(\phi) \in D^q\} \subseteq \{v : v(\psi) \in D^q\} \tag{85}$$

Donde la inclusión debe ser entendida en el sentido de quasets (quasets de valuaciones). Como, por axioma 2.4, la inclusión intensional de quasets implica a la inclusión extensional (pero no se da la recíproca), esta definición no es equivalente a la dada por 80. De alguna manera, implica una combinación de (80) y (83).

> *Observación*: cabe destacar que, exceptuando en la ecuación (85), la única propiedad de QST utilizada hasta el momento en esta sección, no presente en ZF, fue la relativa a su pertenencia indeterminada. Es decir, los razonamientos hasta el momento no se han comprometido con QST completo, sino con una pequeña parte de ella. Cualquier otra teoría de conjuntos que tuviese un primitivo de pertenencia de este estilo y contuviese una replica de ZF en su interior podría haber sido la base de los razonamientos anteriores. Esta es otra de las razones por lo cual en la sección 3.7.1 fue presentada la teoría de rough sets, RST.

4.3. Análisis de los teoremas utilizando QST

En esta sección queremos destacar algunas cuestiones relativas a la relación de consecuencia lógica. Para comenzar el análisis, tomemos la relación de consecuencia lógica definida por (83). Un análisis semejante podemos realizar con la definición (82), ya que son equivalentes.

Sean ϕ y ψ proposiciones de nuestro lenguaje y supongamos que $\phi \models \psi$. Centremos nuestra atención en las valuaciones que, en principio, funcionarían como contraejemplo para tal inferencia. Por (83),

$$\forall v \;\; (v(\psi) \notin D^q \Longrightarrow v(\phi) \notin D^q).$$

Lo anterior podría no validarse sólo si existiese una valuación v', tal que

$$v'(\psi) \notin D^q \;\; \wedge \;\; \neg(v'(\phi) \notin D^q). \tag{86}$$

Por un lado, debido a que $v(\phi) \in D^q \Longrightarrow \neg(v(\phi) \notin D^q)$, una valuación v', tal que satisfaga

$$v'(\psi) \notin D^q \;\; \wedge \;\; v'(\phi) \in D^q \tag{87}$$

, sería un contraejemplo para la inferencia estudiada. Hasta acá no tenemos compromiso con valuaciones que tengan pertenencia indeterminada a D^q. Demos un paso más y volvamos a concentrarnos en la ecuación (86).

Podríamos tener una v', tal que $v'(\phi) \in^- D^q$. Justamente estas valuaciones con pertenencia indeterminada, que no son posibles en la semántica estándar, son las que producirán los contraejemplos extras con respecto al caso clásico. Entonces, además de los contraejemplos aportados por (87), tenemos los casos en los cuales v' cumple que $v'(\psi) \notin D^q$ y tiene pertenencia indeterminada para la proposición ϕ, es decir, v' cumpliría

(88) $$v'(\psi) \notin D^q \ \wedge \ (\neg(v'(\phi) \notin D^q) \wedge \neg(v'(\phi) \in D^q)) \equiv v'(\psi) \notin D^q \ \wedge \ v'(\phi) \in^- D^q$$

Por lo tanto, tenemos más contraejemplos potenciales a la hora de ver si se satisface una consecuencia lógica. Esto significa que la cantidad de teoremas no puede superar a la cantidad dada de forma clásica. Como ya probamos que estas dos relaciones de consecuencia lógica no eran equivalentes, entonces no queda más que la posibilidad de una menor cantidad de teoremas para el caso de QST.

> *Observación*: con lo que se ha mostrado hasta ahora, sumado a la presentación de los conectivos del estilo (78), QST es candidato a adaptarse a las necesidades de los lógicos paracompletos. Por otro lado, como ya fue nombrado, manteniendo las definiciones para los conjuntos de interpretación de los conectivos de forma tal que no admitan huecos en los valores de verdad, y proponiendo en la definición de relación de consecuencia lógica diferentes criterios de satisfacción para el antecedente y consecuente, podría intentarse un acercamiento a lógicas como ST y TS.

4.4. Dificultades en la representación de Nmatrices en QST

En esta sección, queremos abordar el tema de la representación explícita de las *tablas* Nmatriciales correspondientes a los conectivos. Las tablas estándar Nmatriciales podrían ahora tener otro significado, o no dar la información que, en principio, esperaríamos. El ejemplo presentado en nuestra última sección terminará de mostrarar esto.

Cuando comenzamos a considerar diferente maneras de definir los conjuntos de interpretación para los conectivos, vimos que algunas contemplaban huecos en los valores de verdad. Sin embargo, lucían de una manera muy clásica, es decir, su apariencia era la del conjunto de interpretación clásico Nmatricial. Por ejemplo,

(89) $$\tilde{\wedge}^q_{(a,b)} = \begin{cases} A \subseteq D^q & \text{si } a \in D^q \quad \text{y} \quad b \in D^q \\ B \subseteq N^q & \text{si } a \notin D^q \quad \text{o} \quad b \notin D^q \end{cases}$$

Si no tuviésemos en cuenta que en la metateoría hay una teoría de conjuntos como QST, se podría estar tentado a pensar que todas las conjunciones quedan bien valuadas dentro de los correspondientes conjuntos. Se pueden presentar dos dificultades si uno no sabe que está con una teoría de conjuntos no estándar como base de la semántica. La primera son los huecos de verdad debido a los valores de verdad con pertenencia indeterminada a D^q. La segunda dificultad es que si A o B son quasets (y la inclusión es la primitiva de QST), existe la posibilidad de que, aun sin considerar los huecos de verdad, la valuación de la fórmula conjuntiva tenga pertenencia indeterminada al quaset de interpretación correspondiente. Si estas valuaciones son tenidas en cuenta en las inferencias, lo que depende cómo se definan las *valuaciones legales* y la relación de consecuencia lógica, entonces la brecha con lo clásico se sigue agrandando.

Veremos que la parte extensional de nuestras Nmatrices pueden no determinar ni todas las valuaciones posibles, ni todas las consecuencias lógicas. Parte de lo que mostraremos tiene mucha similitud con lo presentado en (Weber et al.2016). En ese artículo se presenta un problema similar: saber cómo luce una tabla de verdad inconsistente y qué información nos brinda. La diferencia fundamental con nuestra presentación es que en (Weber et al. 2016) se trabaja con una teoría de conjuntos paraconsistente en la metateoría, en lugar de contar con QST. Sólo por el resto de esta sección, con la finalidad de destacar el punto en cuestión, supondremos que estamos con una semántica relacional de dos valores de verdad t y f, que son excluyentes. Luego de que dejemos en evidencia la fuerte dependencia que tienen estas *tablas* con la metateoría, volveremos a la semántica de Nmatrices. El enfoque relacional nos permitirá dejar en evidencia dónde entran los presupuestos metateóricos. Más aún cuando la gran diferencia entre QST y ZF se da al nivel del primitivo de pertenencia. Las conclusiones que se obtengan analizando el caso relacional pueden ser trasladadas al sistema Nmatricial. Otra de las razones por las cuales hacemos esto es porque queremos investigar cómo deben lucir (y cómo hay que interpretarlas) las tablas Nmatriciales en QST. Por otro lado, en esta sección , volveremos a encontrar algunas conclusiones ya obtenidas en la sección 3.3 por otros medios.

Consideremos las siguientes cláusulas para asignar valores de verdad a las proposiciones atómicas.

$$\langle p, t\rangle \in R \Longleftrightarrow \langle p, f\rangle \notin R \tag{90}$$

$$\langle p, f\rangle \in R \Longleftrightarrow \langle p, t\rangle \notin R \tag{91}$$

Donde interpretamos $\langle p, t\rangle \in R$ como *la valuación asigna valor verdadero a* p. Esto es, la valuación asigna el valor t si no le asigna el valor f y asigna f si no le asigna (con certeza) t. También supongamos que no queda ninguna proposición fuera del dominio de la relación. Las ecuaciones anteriores podrían parecer redundantes. De hecho, lo serían si estuviésemos trabajando en ZF.

Observación: recordemos que en QST $\neg(\langle p,t\rangle \in R) \not\rightarrow \langle p,t\rangle \notin R$.

Uno estaría tentado a decir que estas relaciones reflejan una semántica relacional clásica. Analicemos un poco mejor esto. ¿Qué limitaciones imponen estas cláusulas a una valuación que tenga pertenencia indeterminada a R? Analicemos el caso de una valuación R_0, tal que $\langle p_0,t\rangle \in^- R_0$ para una proposición p_0 dada. Como $\langle p_0,t\rangle \in^- R_0$ es equivalente a $\neg(\langle p_0,t\rangle \in R_0) \wedge \neg(\langle p_0,t\rangle \notin R_0)$, del primer conyunto de esta valuación y la condición (90), podemos inferir que $\neg(\langle p_0,f\rangle \notin R_0)$. Hasta acá, tendríamos que nuestra valuación tiene en p_0 una pertenencia indeterminada al conjunto de valores designados y que no puede *con certeza no pertenecer* al conjunto de no designados. Pero esto no determina totalmente a la valuación. Es decir, si tuviésemos que cumplir sólo la condición (90), la valuación podría elegir entre no pertenecer con seguridad al conjunto de no designados o pertenecer de forma indeterminada. La condición (91) puede aportarnos más información. Utilizando el segundo conyunto y la condición (91), deducimos que $\neg(\langle p_0,f\rangle \in R_0)$. Lo que significa, juntando las consecuencias de ambas condiciones, que $\langle p_0,f\rangle$ debe tener pertenencia indeterminada a la relación. Por lo tanto, proponer una pertenencia indeterminada de $\langle p_0,t\rangle$ a la relación implica que (si debemos satisfacer ambas condiciones), también $\langle p_0,f\rangle$ tendrá pertenencia indeterminada. El resto de las valuaciones, con pertenencia definida, se comportarán de la forma estándar esperada. Pero lo que hay que destacar es que, aun pidiendo las dos condiciones anteriores, podemos tener una semántica que se aleja de lo esperado. Esto nos vuelve a llevar al tema de los quasets de valores de verdad. Si se contase con quasets de valores de verdad, V^q, entonces se podría satisfacer la condición de tener pertenencia indeterminada tanto a los valores designado como a los no designados, algo que se condice directamente con lo discutido en la sección 3.3 cuando se trató el tema del complemento. Las proposiciones que se relacionen de forma indeterminada con la verdad deben relacionarse de la misma forma con la falsedad (que acá es su complemento). Por decirlo de alguna manera, tendríamos una superposición de estados t/f. Lo destacable es que hemos arribado a la misma propiedad que los quasets complementarios tienen en QST con respecto a los entes con pertenencia indeterminada, pero ahora a partir de pedir las relaciones (90) y (91), en vez de la definición de complemento 3.8. Por otro lado, si el conjunto de valores de verdad fuese clásico, entonces no admitiría pertenencia indeterminada, ni al conjunto de valores designados, ni a su complemento. En (Weber et al. 2016), a partir de un razonamiento análogo (que intencionalmente nosotros seguimos), el autor conluye que *las cláusulas que establezcamos en nuestro lenguaje objeto no llegan a determinar la semántica que tenemos*. Nosotros tenemos algunos puntos de encuentro con el tratamiento ahí dado, ya que (90) y (91) no determinan el comportamiento de las valuaciones con pertenencia indeterminada a la relación, que pueden ser de crucial importancia a la hora de determinar los teoremas del sistema.

Volvamos a nuestro marco de Nmatrices. La expresión $\neg(\langle p,t\rangle \in R_0) \wedge \neg(\langle p,t\rangle \notin R_0)$ podemos interpretarla como $\neg(v_0(p) \in D^q) \wedge \neg(v_0(p) \notin D^q)$. Donde t es un representante del conjunto de valores designados, $t \in D^q$. De la misma forma, $\neg(\langle p,f\rangle \in R_0) \wedge \neg(\langle p,f\rangle \notin R_0)$ significa que $\neg(v_0(p) \in N^q) \wedge \neg(v_0(p) \notin N^q)$, con $f \in N^q$ y N^q el conjunto de valores no designados. Con lo dicho hasta ahora, estamos en condiciones de asegurar que si queremos que las siguientes tablas representen una semántica como la clásica bivalente

$\wedge$	t	f
t	t	f
f	f	f

$\vee$	t	f
t	t	t
f	t	f

	$\neg$
t	f
f	t

entonces debemos asegurarnos de que no existan valuaciones que tengan pertenencia indeterminada a ninguno de los conjuntos (para ninguna proposición p), que $\{t\}$ no represente un quasets singulete (sino un conjunto singulete) y que las valuaciones legales para un conectivo dado queden determinadas por la pertenencia con certeza a su conjunto de interpretación. De no cumplirse alguna de estas cuestiones, la información provista por las tablas anteriores podría diferir fuertemente de lo esperado. En el caso general, volviendo a las Nmatrices, podemos tener valuaciones con pertenencia indeterminada tanto a D^q como a N^q. En breve, mostraremos un ejemplo de esto.

Por otro lado, si queremos que en el caso general entren en juego las valuaciones con pertenencia indeterminada, debemos cambiar la definición de valuación Nmatricial (2.12). Es decir, en el estado actual de las cosas, una valuación cumple que $v(p \odot q) \in \tilde{\odot}_{(a,b)}$, pero pedir esto es lo mismo (por definición de *qextensión* 2.3) que pedir $v(p \odot q) \in qext(\tilde{\odot}_{(a,b)})$. Por lo tanto, si queremos trabajar con quasets de interpretación para los conectivos, deberíamos cambiar algo en la definición de valuación para que entre en juego las valuaciones con pertenencia indeterminada a tales conjuntos. Por ejemplo, una posibilidad es que todas las valuaciones cumplan

$$\neg(v(p \odot q) \notin \tilde{\odot}_{(a,b)}), \tag{92}$$

donde $\tilde{\odot}_{(a,b)}$ es un quaset. Queda claro que, en el caso clásico (donde el quaset coincide con su *qextensión*), esta definición converge a la clásica. Pero en el caso general, las valuaciones con pertenencia indeterminada harán la diferencia. Como las valuaciones con pertenencia indeterminada son tales que

$$\neg(v(p \odot q) \in \tilde{\odot}_{(a,b)}) \wedge \neg(v(p \odot q) \notin \tilde{\odot}_{(a,b)}) \equiv v(p \odot q) \in^{-} \tilde{\odot}_{(a,b)},$$

tales valuaciones satisfarán la ecuación (92).

Si queremos aprovechar estas valuaciones en nuestra semántica, *ya no podremos contar sólo con la información brindada en las tablas estándar de los conectivos, que* *usan sólo la parte extensional de los conjuntos*. Por definición de *qextensión* de un quaset (2.3) :

$$\forall v\ ((v(p\odot q) \in qext(\tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}) \longleftrightarrow v(p\odot q) \in \tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}) \wedge ((v(p\odot q) \notin qext(\tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}) \longleftrightarrow \neg(v(p\odot q) \in \tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}))))$$

Si hacemos que $\tilde{\odot}_{(a,b)} = qext(\tilde{\odot}^{q}_{(a,b)})$; es decir, si convenimos que al no poner el supraíndice q, estamos denotando la parte clásica del quaset, entonces podemos escribir lo anterior como:

$$\forall v\ ((v(p\odot q) \in \tilde{\odot}_{(a,b)} \longleftrightarrow v(p\odot q) \in \tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}) \wedge ((v(p\odot q) \notin \tilde{\odot}_{(a,b)} \longleftrightarrow \neg(v(p\odot q) \in \tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}))))$$

Esto nos dice que la información brindada en una tabla estándar para el conectivo en cuestión, donde sólo aparecen *qextensiones*, sólo nos sirve para determinar cuando una valuación pertenece al quaset correspondiente, esto es, $v(p\odot q) \in \tilde{\odot}^{q}_{(a,b)}$, o cuando es falso que pertenezca con certeza a tal qset, $\neg(v(p\odot q) \in \tilde{\odot}^{q}_{(a,b)})$. Pero de lo anterior no podemos obtener la información que necesitamos en la ecuación (92) correspondiente a las valuaciones indeterminada, es decir, $\neg(v(p\odot q) \notin \tilde{\odot}_{(a,b)})$. Esto quiere decir que si deseamos realmente aprovechar las valuaciones de pertenencia indeterminada para nuestros fines semánticos, entonces debemos presentar *tablas* que contengan más información que la presentada en la parte extensional de los conjuntos. Una posibilidad es presentar la información como se hizo en las ecuaciones (75), (76), (77), donde se presenta el quaset, y no sólo su *qextensión*. En la última sección mostraremos un ejemplo que deja en evidencia lo anterior. Este tema, junto con sus implicaciones, seguirá siendo analizado en futuros trabajos.

4.5. Definición de Nmatriz en QST

Un tema de importancia para nuestra presentación, que ahora simplemente nombraremos para seguir desarrollándolo con mayor detalle en futuros trabajos, es cómo incorporar las nuevas valuaciones en la definición de Nmatriz. Con lo visto en las secciones anteriores, ya tenemos una idea de la cantidad enorme de posibilidades que se abren a la hora de implementar los quasets (o rough sets) al sistema Nmatricial. Existen varias formas de definir una Nmatriz en QST, tal que las nuevas Nmatrices sean una extensión conservativa de las Nmatrices clásicas. Queremos explorar algunas de estas posibilidades. Mostraremos una primera propuesta.

Definición 4.1. Una Nmatriz en QST o $\mathcal{Q}$-Nmatriz es una 3-upla $\langle V^q, D^q, O^q\rangle$, donde V^q, D^q son quasets de valores de verdad y valores designados respectivamente, y

O^q es un conjunto que, por cada conectivo n-ádico $\odot_n$ de nuestro lenguaje, tiene un quaset de interpretación $\tilde{\odot}^q_n : (V^q)^n \longrightarrow \mathscr{P}(V^q) \setminus \emptyset$.
Definimos V^q, D^q y O^q de forma tal que:

- V^q y D^q son quasets no vacíos que no coinciden necesariamente con su *qextensión*. En el caso más general, podría darse que:

  $$V^q \neq qext(V^q) \quad ; \quad D^q \neq qext(D^q)$$

  Respetan la inclusión entre quasets: $D^q \subseteq V^q$. Además, se tiene que

  $$D^q \sqcup N^q = \overline{V^q} \quad \wedge \quad D^q \sqcap N^q = \emptyset$$

  $$(qext(D^q))^c = qext(N^q) \sqcup \{y \in \overline{V^q} : y \in^- D^q\}$$

  Podría llegar a requerirse, dependiendo la aplicación, que las *qextensiones* sean también no vacías (no sólo los quasets). Esto se debe a que la existencia de un quaset no vacío con *qextensión* vacía, no está prohibida por la axiomática de QST. La elección de D^q y N^q está en función de lo discutido acerca del complemento en la sección 3.3.
- O^q es un *conjunto clásico*, $O^q = qext(O^q) = \{\tilde{\wedge}^q, \tilde{\vee}^q, \tilde{\neg}^q, \ldots, (\tilde{\odot}^q_n)_i\}$. Es decir, O^q es la colección de los quasets correspondientes a cada conectivo. No podemos tener pertenencia indeterminada a esta colección.

La existencia del quaset de interpretación para cada conectivo del lenguaje queda asegurada por la definición de quafunción 3.4 y el axioma de quaset potencia 3.4 (o 3.3).

Definición 4.2. Sea $\mathscr{Q}$-$\mathscr{M} = \langle V^q, D^q, O \rangle$ una $\mathscr{Q}$-Nmatriz para un lenguaje $\mathscr{L}$. Una *valuación parcial* en $\mathscr{Q}$-$\mathscr{M}$ es una quafunción (o qfunción) $v^q : \mathscr{F}rm_{\mathscr{L}} \longrightarrow V^q$, cerrada bajo subfórmulas, tal que:

- $v^q(p) \in V^q$ si p es una fórmula atómica.
- para cada conectivo n-ario $\odot_n$ del lenguaje se cumple que:

  $$\neg(v^q(\odot_n(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)) \notin \tilde{\odot}^q_{n(v^q(\psi_1), v^q(\psi_2), \ldots, v^q(\psi_n))}).$$

De esta forma, hemos elegido que las valuaciones siempre otorguen a las proposiciones atómicas valores con pertenencia determinada al quaset V^q. Esta elección produce que, a nivel de las proposiciones atómicas, la indeterminación de las valuaciones sea la propia de la parte clásica de la Nmatriz. La indeterminación aportada por QST, debido a la pertenencia indeterminada, entra en juego para las fórmulas no atómicas. Podría tomarse otro criterio, permitiendo valuaciones con pertenencia indeterminada a V^q también para las fórmulas atómicas. Pensamos que el criterio que hemos elegido es suficientemente amplio para abordar todas las cuestiones que necesitamos. También puede notarse que toda $\mathscr{Q}$-$\mathscr{M}$ converge a su respectiva Nmatriz clásica cuando tomamos las *qextensiones* de todos los quasets involucrados.

Definición 4.3. Relación de consecuencia lógica en QST. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathscr{L}$ y $\psi \in \mathscr{L}$. Decimos que $\Gamma \models_q \psi$ si y sólo si :

$$\forall v^q \quad \forall \phi \in \Gamma \quad (\neg(v^q(\phi) \notin D^q) \Longrightarrow \neg(v^q(\psi) \notin D^q)).$$

> Observaciones: para definir la relación de consecuencia lógica tenemos amplia libertad. Algunas de las opciones posibles fueron discutidas en 4.2.

Un ejemplo de aplicación

Sean V^q, D^q, N^q quasets de valores de verdad, designados y no designados respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} &qext(V^q) = \{t, f\} \quad ; \quad qext(D^q) = \{t\} \quad ; \quad qext(N^q) = \{f\} \\ &\overline{V^q} = \{t, f, n\} \quad ; \quad \overline{D^q} = \{t, n\} \quad ; \quad \overline{N^q} = \{f, n\} \end{aligned} \tag{93}$$

Podemos ver que lo anterior está de acuerdo con (3.8) y que la *existencia de tales quasets están garantizadas por los axiomas de QST^+*. No hace falta más que aplicar el axioma 3.6 al conjunto clásico $\{t, f, n\}$ para obtener el quaset V^q (antiestandarizando el elemento n). Aplicando el mismo axioma a los conjuntos $\{t, n\}$ y $\{f, n\}$, obtenemos los dos otros dos quasets. El elemento n tiene pertenencia indeterminada tanto a D^q como a N^q, esto es, $\neg(n \in D^q) \wedge \neg(n \notin D^q)$ y $\neg(n \in N^q) \wedge \neg(n \notin N^q)$. Lo que podríamos interpretarlo como que el valor n no es designado, ya que $\neg(n \in D^q)$, ni tampoco no designado, ya que $\neg(n \in N^q)$. Podríamos pensarlo como un valor de verdad perteneciente a una semántica paracompleta, como, por poner un ejemplo, FDE. Nuestros valores de verdad con pertenencia débil o indeterminada a quasets complementarios admiten interpretaciones de este estilo. La diferencia principal radica en que en una axiomática clásica, como la que fundamenta FDE (entre otras), estos valores de verdad deben pertenecer a la *qextensión* (extensión) del conjunto, mientras que ahora pueden tener una pertenencia indeterminada (pertenecer sólo a su *clausura*).

> Observación: la no clasicidad al contar con quasets de valores de verdad *no necesariamente* debe radicar en tener valores de verdad *extraños* o no estándar, es decir, en su ontología, sino que la axiomática de QST admite interpretarlos como elementos sobre los cuales tenemos incertidumbre epistémica acerca de la pertenencia a los quasets.

Consideremos un conectivo $\vee$, cuyo conjunto de interpretación $\tilde{\vee}_{(a,b)}$, con $a = v(\phi)$, $b = v(\psi)$ y ϕ, ψ fórmulas atómicas del lenguaje (y v valuación legal), esté dado por la tabla siguiente[8]:

(94)

$\tilde{\vee}$	t	f
t	D^q	D^q
f	D^q	N^q

Si por $\{t\}_q$ denotamos el quaset D^q bajo los requisitos de (93) y por $\{f\}_q$ denotamos N^q bajo las mismas condiciones, la tabla anterior sería equivalente a :

(95)

$\tilde{\vee}$	t	f
t	$\{t\}_q$	$\{t\}_q$
f	$\{t\}_q$	$\{f\}_q$

Supongamos ahora que estamos trabajando con una relación de consecuencia lógica preservadora de valores designados, como la dada en (80), y estudiemos si se cumple la siguiente relación:

$$\phi, \psi \models_q \phi \vee \psi$$

Donde consideramos que ϕ y ψ son fórmulas atómicas del lenguaje. Analicemos el siguiente caso: $v(\phi), v(\psi) \in \{t\}_q$. Siguiendo 4.2, tomaremos como valuaciones legales todas aquellas que cumplan que

$$\neg(v(\phi \vee \psi) \notin \tilde{\vee}_{(v(\phi),v(\psi))}).$$

Esto es, todas las que pertenezcan al quaset de interpretación de la disyunción, como también aquellas que tengan pertenencia indeterminada a tal conjunto. Por supuesto, en el límite clásico, estas valuaciones coinciden con las estándar Nmatriciales. Esto significa que existirán valuaciones tales que $v(\phi \vee \psi) \in^{-} \tilde{\vee}_{(v(\phi),v(\psi))}$, es decir,

(96) $$\neg(v(\phi \vee \psi) \in \tilde{\vee}_{(v(\phi),v(\psi))}) \wedge \neg(v(\phi \vee \psi) \notin \tilde{\vee}_{(v(\phi),v(\psi))})$$

Si alguna de estas valuaciones es tomada para nuestro caso, con $v(\phi) \in \{t\}_q$ y $v(\psi) \in \{t\}_q$, y utilizamos la tabla (94), tendremos que

$$\phi, \psi \not\models_q \phi \vee \psi.$$

Veamos un poco mejor esto. Que $v(\phi) \in \{t\}_q$ y $v(\psi) \in \{t\}_q$ implica que $v(\phi) \in qext(\{t\}_q) = \{t\}$ y $v(\psi) \in qext(\{t\}_q) = \{t\}$. Es decir, $v(\phi) = v(\psi) = t$ y por la tabla, tenemos que $\tilde{\vee}_{(t,t)} = \{t\}_q$. Con lo que tendremos finalmente (por la tabla correspondiente) que nuestra axiomática permite la existencia de la siguiente valuación:

$$v(\phi) = t \in D^q \quad ; \quad v(\psi) = t \in D^q \quad ; \quad \neg(v(\phi \vee \psi) \in D^q)$$

Por ejemplo, existe una valuación dentro de nuestro formalismo (podemos definirla explícitamente sin contradecir la axiomática), tal que

$$v(\phi) = t \in D^q \quad ; \quad v(\psi) = t \in D^q \quad ; \quad v(\phi \vee \psi) = n \in^{-} D^q$$

Lo que significa que esta valuación representa un contraejemplo para la inferencia en cuestión. Podemos relacionar esto con lo dicho en 4.3 sobre la cantidad de teoremas de estas semánticas. Si deseamos seguir manteniendo inferencias como ésta se tienen al menos dos alternativas: a) cambiar el conjunto de valuaciones legales para no permitir que exista pertenencia indeterminada al quasets de interpretación de los conectivos o b) cambiar la relación de consecuencia para que, en lugar de preservar valores designados, se comporte como la relación de la ecuación (82). Puede verse que esta última relación mantiene la inferencia mostrada.

El anterior es sólo un ejemplo que deja en evidencia la riqueza de opciones con la que se cuenta para modelar ciertas situaciones. Dependiendo de los objetivos perseguidos, uno debe saber restringir el uso de los quasets. Recordemos que los mismos se pueden implementar a cualquier altura del tratamiento formal, ya sea desde el comienzo teniendo quasets y quafunciones o admitiendo los mismos sólo para los valores de verdad. Por esto mismo, la definiciones sugeridas arriba con respecto a las Nmatrices en QST son simplemente una posibilidad entre muchas que pueden ser exploradas.

4.5.1. ¿Quasets de valores de verdad? Motivaciones.

Llegado este punto, uno podrían preguntarse *¿por qué los conjuntos de valores de verdad pueden ser considerados conjuntos no clásicos (quasets) en el contexto de QST? ¿Qué fundamenta esta posibilidad?*, *¿bajo qué circunstancias un conjunto de valores de verdad puede considerarse no clásico?*

Recordemos que en (Dalla Chiara et al. 1998), sus autores dan apoyo a que ciertos entes puedan pertenecer a un quaset de forma indeterminada basándose en el principio de incertidumbre de Heisenberg. Se afirma que debido al axioma 2.2 ciertas instancias del la fórmula ($x \in y \vee x \notin y$) no se validan:

> and indetermined membership relations are possible (in accordance with the quantum uncertainty relations).

De esta manera, para apoyar el uso de quasets de valores de verdad, podríamos utilizar el principio de incertidumbre. Esto es, cuando debido a la incertidumbre cuántica, no podemos afirmar con precisión si (por poner un ejemplo) la energía de un sistema es a (perteneciente al intervalo compatible con el principio de incertidumbre), podríamos decir que el valor de verdad de la proposición *la energía del sistema toma el valor a* pertenece indeterminadamente al quaset de valores designados (y, por lo tanto, también a su complemento). Dicho de otra forma, si no tenemos certidumbre absoluta acerca de si el sistema tiene valor de la energía igual a a, el proyector del espacio de Hilbert ($\mathbf{P}_a$) asociado a esta proposición es valuado con pertenencia indeterminada en el quaset D. Y si luego de la medición se determina que el valor es a, decimos que el valor de verdad de la proposición pertenece con seguridad al quaset de valores designados. En (Jorge y Holik 2020) se toma en cuenta la posibilidad de cierta incertidumbre epistémica (u ontológica) a la hora de medir, que no permitiría garantizar que la proposición en cuestión deba valuarse necesariamente al 1. Por lo tanto, la salida en ese caso, que por estar basada en ZF no cuenta con la posibilidad de tener quasets de valores de verdad, consiste en tener un conjunto de valores designados, que no sólo contenga al 1, sino que tenga algunos valores muy cercanos a él. Es decir, sus autores toman $D = [1, \alpha]$, con α tan cercano a 1 como permitan las condiciones experimentales en cada caso. Contando con quasets de valores de verdad, podríamos sumarle a ésta otras alternativas como las dichas arriba.

Ya nombramos que los valores con pertenencia indeterminada tanto al quasets de valores designados como al de no designados pueden interpretarse como valores de verdad paracompletos, ya que es falso que sean designados y es falso que sean no designados. El carácter no estándar de nuestros conjuntos de valores de verdad no tienen que radicar *necesariamente* en la naturaleza no estándar de sus valores, sino que puede venir dada por nuestra ignorancia en cuanto a sus pertenencias. Esto es, los quasets de valores de verdad podrían admitir una interpretación epistémica denotando que no tenemos certidumbre acerca de si ciertas proposiciones son designada o no.

Por otro lado, se sabe que, desde un punto de vista netamente algebraico, las valuaciones (al menos las deterministas) son homomorfismos de álgebras. Por lo tanto, lo que hacemos es valuar nuestros sistemas en álgebras. Si estamos en QST, nada prohíbe que las estas álgebras sean de quasets. Nuestro formalismo permite definir de forma consistente funciones homomorfas cuyos dominios sean quasets de forma tal que, viendo esta quafunción como un quasets, su parte clásica sea una función homomorfa de ZF (o isomorfa a ella). Por lo tanto, trabajar en QST nos permite siempre que deseemos *mantener todas las alternativas disponibles en ZF*.

5. Conclusiones

Hemos propuesto una posible generalización del sistema Nmatricial clásico basada en el uso de QST a nivel metateórico. Mostramos que las nuevas $\mathscr{Q}$-Nmatrices representan una extensión conservativa de las Nmatrices clásicas, ya que todos los quasets involucrados en las definiciones son tales que sus *qextensiones* coinciden con los respectivos conjuntos usados clásicamente. También mostramos que el nuevo sistema puede incorporar los quasets al nivel de su relación de consecuencia lógica y que, en todas las alternativas analizadas, el sistema tiene menos teoremas que su contraparte clásica. Para asegurar la buena fundación de las $\mathcal{Q}$-Nmatrices presentadas, extendimos la axiomatización original de QST, a QST$^+$ y $\overline{QST}^+$, con lo cual aseguramos la existencia de ciertos conjuntos y funciones indispensables para la semántica Nmatricial. También hemos obtenidos otros resultados que merecen ser destacados: a) la relación establecida entre RST y QST$^+$, que, entre otras cosas, nos ha permitido garantizar la existencia de modelos dentro de la axiomática extendida de QST b) la posibilidad de interpretar a los sistemas cuánticos que se encuentren en superposición de estados mutuamente excluyentes como elementos con pertenencia indeterminada a ciertos quasets complementarios. Queda pendiente para trabajos futuro la exploración de nuevas consecuencias que pueda brindar la axiomática extendida de QST, como también la de nuevas relaciones que se puedan establecer entre $\mathfrak{Q}$, QST$^+$ y las Nmatrices. La aplicación de las $\mathcal{Q}$-Nmatrices a sistemas lógicos paraconsistentes/paracompletos, como TS-ST, junto con las posibles aplicaciones al retículo de proyectores cuánticos que pueda tener nuestro sistema son otros de los objetivos a ser abordados en próximos trabajos.

A. Apéndice: caracterización semántica de los primitivos $\sqcap, \sqcup$

Este apéndice tiene como objetivo mostrar la similitud que guardan a nivel semántico la unión e intersección de quasets con sus análogos de RST. Nuestro análisis está basado en lo presentado en (Avron y Konikowska 2008) sobre las Nmatrices características de la intersección y unión de rough sets. Ese artículo caracteriza semánticamente a la unión e intersección (además de la negación) utilizando Nmatrices en ZF. Es decir, Nmatrices donde todos sus conjuntos son clásicos. Sólo por este apartado, trabajaremos bajo el mismo supuesto con el objetivo de ver posibles similitudes entre las uniones e intersecciones de ambos sistemas.

En Avron y Konikowska (2008), sus autores justifican la elección de un conjunto de valores de verdad V formado por tres valores, $V = \{t, u, f\}$. Donde u representa un valor de verdad indeterminado. El conjunto de valores designado es elegido como $D = \{v\}$. Basado en las siguientes relaciones, que se satisfacen en RST,

$$(97) \qquad \overline{Apr}(A \cup B) = \overline{Apr}(A) \cup \overline{Apr}(B) \quad ; \quad \underline{Apr}(A) \cup \underline{Apr}(b) \subseteq \underline{Apr}(A \cup B)$$

$$\underline{Apr}(A) \cap \underline{Apr}(B) = \underline{Apr}(A \cap B) \quad ; \quad \overline{Apr}(A \cap B) \subseteq \overline{Apr}(A) \cap \overline{Apr}(B)$$

los autores llegan a las siguientes Nmatrices clásicas para la unión e intersección (para más detalles ver sección 6 de Avron y Konikowska 2004).

(98)

$\widetilde{\cup}$	t	u	f
t	t	t	t
u	t	$\{t,u\}$	u
f	t	u	f

$\widetilde{\cap}$	t	u	f
t	t	u	f
u	u	$\{u,f\}$	f
f	f	f	f

Las relaciones correspondientes a 97 en QST serían

(99) $i)\ \overline{(A \sqcup B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad ii)\ qext(A) \cup qext(B) \subseteq qext(A \sqcup B)$

$$iii)\ qext(A) \cap qext(B) = qext(A \sqcap B) \quad ; \quad iv)\ \overline{(A \sqcap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

Donde hemos reemplazado $\sqcap, \sqcup$ por $\cap, \cup$ respectivamente cuando conectan conjuntos clásicos. Dos de estas condiciones ya vimos que son satisfechas en QST cuando tratamos su topología, las codiciones 3 de las definicones 3.5 y 3.6. Mostraremos que se cumplen las otras dos condiciones. Analicemos iii).

Por el axioma de conjunción débil de quasets 2.7,

$$A \sqcap B \subseteq A \quad \wedge \quad A \sqcap B \subseteq B.$$

Utilizando que la inclusión de quasets implica la inclusión extensional,

$$qext(A \sqcap B) \subseteq qext(A) \quad \wedge \quad qext(A \sqcap B) \subseteq qex(B).$$

Como las *qextensiones* son conjuntos clásicos, de lo anterior se desprende directamente que

$$qext(A \sqcap B) \subseteq qext(A) \cap qext(B).$$

Ahora veremos que se cumple la inclusión inversa, con lo cual tendremos probada iii).

De $qext(A) \subseteq A$ y $qext(B) \subseteq B$ se desprende, por condición v') de 3.1,

$$qext(A) \cap qext(B) \subseteq A \sqcap B$$

Volviendo a utilizar que la inclusión de quasets implica a la extensional, obtenemos que

$$qext(qext(A) \cap qext(B)) \subseteq qext(A \sqcap B)$$

Pero puede verse que la *qextensión* aplicada al miembro izquierdo de la inclusión no tiene ningún efecto, ya que tal conjunto ya es clásico. Por lo tanto,

$$(qext(A) \cap qext(B)) \subseteq qext(A \sqcap B).$$

Con lo cual queda probado el otro sentido de la inclusión y la propiedad iii).

La condición ii) es consecuencia del axioma de unión 2.13 y de que la implicación extensional sea implicada por la de quasets.

$$A \subseteq A \sqcup B \quad \wedge \quad B \subseteq A \sqcup B \Longrightarrow qext(A) \subseteq qext(A \sqcup B) \quad \wedge \quad qext(B) \subseteq qext(A \sqcup B)$$

De lo cual, por tratarse de conjuntos clásicos como las *qextensiones*, obtenemos la condición deseada

$$qext(A) \cup qext(B) \subseteq qext(A \sqcup B)$$

Hemos mostrados que se verifican las condiciones análogas en QST de 3.1. Por lo tanto, podríamos seguir los mismos razonamientos utilizados en Avron y Konikowska (2008) para caracterizar la unión e intersección de quasets de forma análoga, obteniendo tablas equivalentes al caso de RST. Lo cual estaría en absoluta concordancia con lo discutido anteriormente en la sección 3.3 sobre el complemento de quasets. Sin embargo, observemos que la obtención de estas relaciones es debido a que hemos impuesto ciertas restricciones topológicas presentadas en 3.6. La axiomática de QST por sí misma, sin estas condiciones adicionales, no permite tal caracterización. Permitiría otra Nmatriz más indeterminista que la de RST.

Referencias

Avron, A. 2007. Non-deterministic semantics for families of paraconsistent logics. *School of Computer Science*. Tel-Aviv University.

Avron, A.; Lev, I. 2005. Non-deterministic Multiple-valued Structures. *Journal of Logic and Computation* **15**(3): 241–61.

Avron, A.; Konikowska, B. 2004. Proof systems for logics based on non-deterministic multiple-valued structures. *Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk*: 1–26.

Avron, A.; Konikowska, B. 2008. Rough sets and 3-valued logics. *Studia Logica* **90**: 69–92.

Avron, A.; Lev, I. 2005. Canonical propositional Gentzen-type systems. *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Automated Reasoning* **13**: 365–87.

Avron, A.; Zamansky, A. 2005. Non-deterministic semantics for logical systems. *Handbook of Philosophical Logic* **16**: 227–304.

Barrio, E. A.; Pailos, F. 2021. Why a logic is not only its set of valid inferences. *Análisis Filosófico* **41**(2): 261–72.

Chemla, E.; Egré, P.; Spector, B. 2017. Characterizing logical consequence in many-valued logic. *Journal of Logic and Computation* **27**(7): 2193–226.

Cobreros, P.; Egré, P.; Ripley, D.; van Rooij, R. 2012. Tolerant, classical, strict. *Journal of Philosophical Logic* **41**(2): 347–85.

Dalla Chiara, M. L.; Giuntini, R.; Krause, D. 1998. Quasiset theories for microobjects: a comparison. In: E. Castellani (ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, pp.142–52. Princeton: Princeton University Press.

Dalla Chiara, M. L.; Toraldo di Francia, G. 1993. Individuals, kinds and names in physics. In: G. Corsi; M. L. Dalla Chiara; G. C. Ghirardi (eds.) *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, and Physics*, pp.261–84. Kluwer Ac. Pu.

de Barros, J. A.; Holik, F.; Krause, D. 2022. *Distinguishing indistinguishabilities: Differences Between Classical and Quantum Regimes*. Springer, forthcoming.

do Nascimento, M. C.; Krause, D.; de Aráujo Feitosa, H. 2011. The quasilattice of indiscernible elements. *Studia Logica* **97**(1): 101–26.

Gleason, A. M. 1957. Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space. *Journal of Mathematics and Mechanics* **6**(6): 885–93.

Holik, F.; Jorge, J.; Krause, D.; Lombardi, O. 2022. Quasi-set theory: a formal approach to a quantum ontology of properties. *Synthese*: 401.

Holik, F.; Jorge, J. P.; Massri, C. 2020. Indistinguishability right from the start in standard quantum mechanics. Arxiv arxiv:2011.10903v1.

Jorge, J. P.; Holik, F. 2020. Non-deterministic semantics for quantum states. *Entropy* **22**(2): 156.

Jorge, J. P.; Holik, F. 2022. Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, I. *Teorema* **41**(3): 65–88.

Jorge, J. P.; Holik, F. 2023. Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, II. *Teorema* **42**(1): 149–169.

Krause, D. 1992. On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **33**(3): 402–11.

Krause, D. 2012. On a calculus of non-individuals: ideas for a quantum mereology. In: L. H. d. A. Dutra; A. M. Luz (eds.)*Linguagem, Ontologia e Ação, volume 10 of Coleção Rumos da Epistemologia*, pp.92–106. NEL/UFSC.

Krause, D. 2017. Quantum mereology. In: H. Burkhard; J. Seibt; G. Imaguire; S. Georgiogakis (eds.) *Handbook of Mereology*, pp.469–72. München: Springer-Verlag.

Krause, D. 2020. Quantum mechanics, ontology, and non-reflexive logics. In: J. A. de Barros; D. Krause (eds.) *A True Polimath: A Tribute to Francisco Antonio Doria*, pp.75–130. London: College Publications.

Mahajan, P.; Kandwal, R.; Vijay, R. 2012. Article: Rough set approach in machine learning: A review. *International Journal of Computer Applications* **56**(10): 1–13.

Manero Orozco, J. A. 2018. Sobre la estructura que subyace a la mecánica cuántica Bohmiana. PhD thesis. *Universidad Nacional autônoma de México, Instituto de Investigaciones Filosóficas*.

Manin, Y. I. 1976. Foundations. In: F. Browder, F.; A. M. Society (eds.) *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, p.36. American Mathematical Society.

Orłowska, E. 1982. Logics of vague concepts. *Bulletin of the Section of Logic*: 115–26.

Orłowska, E. 1985. *Semantics of Vague Concepts*. Boston: Springer US, p.465–482.

Pailos, F. M. 2020. A fully classical truth theory characterized by substructural means. *The Review of Symbolic Logic* **13**(2): 249–68.

Pawlak, Z. 1982. Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences* **11**(1): 341–56.

Pawlak, Z. 1986. On rough relations. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences* **34**(9): 587–90.

Pawlak, Z. 1987. On rough functions. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences* **35**(5–6): 250–2.

Pawlak, Z.; Skowron, A. 2007a. Rough sets and boolean reasoning. *Information Sciences* **177**(1): 41–73.

Pawlak, Z.; Skowron, A. 2007b. Rough sets: Some extensions. *Information Sciences* **177**(1): 28–40.

Pawlak, Z.; Skowron, A. 2007c. Rudiments of rough sets. *Inf. Sci.* **177**: 3–27.

Pedrycz, W.; Han, L.; Peters, J.; Ramanna, S.; Zhai, R. 2001. Calibration of software quality: Fuzzy neural and rough neural computing approaches. *Neurocomputing* **36**(1): 149–70.

Peters, J. F.; Skowron, A.; Synak, P.; Ramanna, S. 2003. Rough sets and information granulation. In: T. Bilgiç; B. De Baets; O. Kaynak (eds.) *Fuzzy Sets and Systems | IFSA 2003*, pp.370–7. Springer: Berlin, Heidelberg.

Ripley, D. 2012. Conservatively extending classical logic with transparent truth. *The Review of Symbolic Logic* **5**(2): 354–78.

Skowron, A. 2005. Rough sets in perception-based computing. In: S. K. Pal; S. Bandyopadhyay; S. Biswas (eds.) *Pattern Recognition and Machine Intelligence*, pp.21–9. Berlin, Heidelberg: Springer.

Solé Bellet, A. 2010. *Realismo e interpretación en mecânica bohmiana*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Suraj, Z. 2004. *An introduction to rough set theory and its applications a tutorial*. Cairo: ICENCO.

Takeuti, G. 1981. Quantum set theory. In: E. G. Beltrametti; B. C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, pp.303–22. New York and London: Plenum Press.

Weber, Z.; Badia, G.; Girard, P. 2016. What is an inconsistent truth table? *Australasian Journal of Philosophy* **94**(3): 533–48.

Weidner, A. J. 1981. Fuzzy sets and boolean-valued universes. *Fuzzy Sets and Systems* **6**: 61–72.

Wintein, S. 2014. On the strict/tolerant conception of truth. *Australasian Journal of Philosophy* **92**(1): 71–90.

Notas

[1]Agradecemos a uno de los revisores anónimos haber notado (y recomendado) destacar este punto para mayor claridad del lector.

[2]El autor hace aquí referencia a la teoría de conjuntos desarrollada por Georg Cantor.

[3]Aunque es importante mencionar aquí a la Mecánica bohmiana, la cual es una reformulación de la teoría cuántica en la cual los sistemas cuánticos son representados como partículas que poseen trayectorias bien definidas y son guiados por una onda piloto.

[4]Cuando ampliemos la axiomática original en la sección 3.5, tendremos un axioma, 3.6, que garantizará la existencia de quasets propios a partir de cualquier conjunto clásico no vacío

[5] Se recomienda al lector interesado ingresar a la página oficial de la Sociedad Internacional de Rough Sets para informarse acerca de su mundo y potencial: https://www.roughsets.org/.

[6]No deseamos introducir nuevas discusiones más allá de las necesarias, pero esto pide una esclaración: la 'nube' de um qset x relativa a otro qset $y \supseteq x$ es el qset $\mathsf{C}_y(x)$ de los elementos de y para los cuales hay un indiscernible in x. Informalmente, son los elementos de y *que podrían* estar en x.

[7]Recomendamos al lector interesado relacionar esta particularidad de la lógica cuántica con la pérdida de la *edecuación* del conjunto de interpretación para la disyunción del retículo de proyectores estudiada en de (Jorge y Holik 2022).

[8]Esta tabla es exhaustiva sólo para el caso en el cual se desea valuar la disyunción de dos proposiciones atómicas, de lo contrario habría que considerar en la tabla los valores con pertenencia indeterminada al quaset V^q

Agradecimientos

Estamos muy agradecidos con Lucas Rosenblatt por sus recomendaciones y aportes cuando la idea principal se estaba gestando. También agradecemos a los revisores anónimos que se han tomado el tiempo de hacer una lectura concienzuda del artículo aportando sugerencias pertinentes desde su experticia para que el artículo pueda ser recibido de la mejor forma por los lectores.

Este trabajo fue realizado bajo el subsidio de la beca de Agencia Nacional de Promoción de la Investigación, el Desarrollo Tecnológico y la Innovación.